

高一年级数学第 13 课时《诱导公式》精讲学习指南答案

知识辨析：

(1) ×

(2) ×

(3) ×

(4) ✓

(5) ×

(6) ×

例题答案与解析：

例 1 (1) 在单位圆中，角 α 与 β 均以 ox 轴为始边，它们的终边关于 x 轴对称，已知角 β 的

终边与单位圆的交点为 $P(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ ，求 $\frac{\sin(\pi+\alpha)\tan(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ 的值.

分析：本题应该先化简再求值，可以利用圆的对称性求角 α 终边与单位圆的交点，再求 α 的三角函数值，也可以利用角 α 与 β 对称关系得到角之间的关系 $\alpha = -\beta + 2k\pi$ ，再求角 α 的三角函数.

解： $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ ， $\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$ ， $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$ ，

$$\frac{\sin(\pi+\alpha)\tan(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha \cdot (-\tan\alpha)}{-\sin\alpha} = -\tan\alpha$$

由题知角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ ，由三角函数定义可知，

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{\sin(\pi+\alpha)\tan(\pi-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = \frac{4}{3}$$

(2) 分析：由选项可知，要判断函数对称性，需要考虑函数的奇偶性， $f(x)$ 比较复杂，

考虑先用诱导公式将函数化简再判断.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \cos(\frac{\pi}{2}+x) + \cos(\pi-x) \sin(\frac{3\pi}{2}+x) \\ &= \sin x \cdot (-\sin x) + (-\cos x) \cdot (-\cos x) \\ &= -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

$$f(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x) \neq -f(x)$$

故 $f(x)$ 为偶函数但非奇函数

所以答案选 B

例 2 (1) 分析: 观察 $\frac{\pi}{6}-\alpha$ 与 $\frac{5\pi}{6}+\alpha$ 、 $\alpha-\frac{\pi}{6}$ 存在的关系, 用 $\frac{\pi}{6}-\alpha$ 表示 $\frac{5\pi}{6}+\alpha$ 、 $\alpha-\frac{\pi}{6}$.

$$\text{解 } \because \cos(\frac{5\pi}{6}+\alpha) = \cos\left[\pi - (\frac{\pi}{6}-\alpha)\right] = -\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6}) = \sin^2\left[-(\frac{\pi}{6}-\alpha)\right] = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{6}-\alpha) = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos(\frac{5\pi}{6}+\alpha) - \sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 分析: 观察 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 与 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 、 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$ 存在的关系, 用 $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 表示 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 、 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$.

$$\text{解: } \because \cos(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4}-\alpha)\right] = \sin(\frac{\pi}{4}-\alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{4}+\alpha) = \sin\left[\pi - (\frac{\pi}{4}-\alpha)\right]$$

$$\cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 1 - \sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha) = 1 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos(\frac{\pi}{4}+\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{4}+\alpha) + \cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} + \frac{16}{25} = \frac{16}{25}.$$

反思与感悟: 对于这类问题, 关键是要能发现它们的互补、互余关系: 如 $\frac{\pi}{6}-\alpha$ 与 $\frac{5\pi}{6}+\alpha$,

$\frac{\pi}{3}-\alpha$ 与 $\frac{2\pi}{3}+\alpha$, $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 与 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$ 等互补, 如 $\frac{\pi}{3}-\alpha$ 与 $\frac{\pi}{6}+\alpha$, $\frac{\pi}{3}+\alpha$ 与 $\frac{\pi}{6}-\alpha$, $\frac{\pi}{4}-\alpha$ 与 $\frac{\pi}{4}+\alpha$

等互余, 遇到此类问题, 不妨考虑两个角的关系, 要善于利用角的变换来解决问题, 体现了转化与化归的思想.

例 3 (1) 分析: 利用诱导公式逐个化简

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})\cos(-2\pi + \alpha)\tan(2\pi - \alpha)}{\sin(\alpha + \frac{5\pi}{2})\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2})} \\ &= \frac{-\cos\alpha \cos\alpha (-\tan\alpha)}{\cos\alpha \sin\alpha} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) 化简 $\sin(\frac{n\pi}{2} + \alpha)$

当 $n=4k+1$ 时 $\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$; 当 $n=4k+2$ 时 $\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$; 当 $n=4k+3$ 时

$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$; 当 $n=4k+4$ 时 $\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$;

反思与感悟:

1. 利用诱导公式证明等式问题, 应遵循化繁为简的原则, 关键在于公式的灵活应用;

2. $\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)$ 这类问题需要分类讨论 n 的奇偶.

例 4 分析: 本题利用诱导公式、同角三角函数关系及三角形内角和等相关知识解决.

解: $\sin A = \sqrt{2} \sin B$, $\sqrt{3} \cos A = \sqrt{2} \cos B$ 平方相加得 $2\cos^2 A = 1$, 有 $\cos A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$ 或 $A = \frac{3\pi}{4}$.

当 $A = \frac{3\pi}{4}$ 时, $\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $B \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 即 A, B 都是钝角, 矛盾.

所以 $A = \frac{\pi}{4}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$, 所以 $C = \frac{7\pi}{12}$.

反思与感悟: 三角形中内角和为 π 与同角三角函数的关系都是题目中常出现的隐含条件, 解题过程中注意挖掘.