# 高一年级数学第 12 课时学习指南

## 5.2.2 同角三角函数基本关系

### 复习任务单

【学习目标】

1、 理解并记忆同角三角函数的基本关系公式，并能灵活运用解决问题；

2、 归纳出化归思想方法和证明三角恒等式的一般方法.

【学法指导】

首先阅读教材P182-P184，梳理同角三角函数基本关系，限时 15min 完成问题清单两个问题，；独立完成典型问题，总结同角三角函数基本关系在解决三角函数相关问题中的作用以及注意事项.

【问题清单】

问题 1：回顾同角三角函数基本关系及其证明方法.

【典型问题】

例 1. 已知 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，计算下列各式的值：

(1) $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$；

(2) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$；

(3) 若 $-\pi<\alpha<0$，求 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

【解析】

$\because \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2 \quad \therefore \dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=2 \quad \therefore \tan\alpha=3$

（1） $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha-1}{2\tan\alpha+3}=\dfrac{8}{9}$

（2） $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$

$$=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1=\frac{3\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\frac{21}{10}+1=\frac{31}{10}$$

（3）$\because \tan\alpha = 3, \quad -\pi < \alpha < 0 \quad \therefore -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \quad \therefore \sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

另法：

$$\because \tan\alpha = 3, \quad \therefore \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{8}{5}$$

$$\because \tan\alpha = 3, \quad -\pi < \alpha < 0 \quad \therefore -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2} \quad \therefore \sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

注意：利用同角三角函数关系求值时注意利用隐含的条件进行解的取舍，利用同角三角函数关系化简同角同次幂的问题通常会构造分式，没有分式的可以考虑 1 的妙用，再同除余弦或余弦的平方.

例 2. 已知函数 $f(x) = 3\sin^2 x + a\cos x - \cos^2 x + a^2 - 1$

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并加以证明；　　　(2) 求 $f(x)$ 的最大值.

【解析】

（1）

$$f(x) = 3\sin^2 x + a\cos x - \cos^2 x + a^2 - 1 = 3(1 - \cos^2 x) + a\cos x - \cos^2 x + a^2 - 1$$
$$= -4\cos^2 x + a\cos x + a^2 + 2$$

因为定义域为 $R$ ，关于原点对称

所以 $f(-x) = -4\cos^2(-x) + a\cos(-x) + a^2 + 2 = -4\cos^2 x + a\cos x + a^2 + 2 = f(x)$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数.

（2）令 $t = \cos x, \quad (t \in [-1, 1])$，则 $f(x) = g(t) = -4t^2 + at + a^2 + 2$

因为对称轴 $t_0 = \frac{a}{8}$，所以分类讨论

当$t_0 \ge 1$，即$a \ge 8$时，$f(x)_{\max} = g(1) = a^2 + a - 2$；

当$-1 < t_0 < 1$，即$-8 < a < 8$时，$f(x)_{\max} = g(\frac{a}{8}) = \frac{17}{16}a^2 + 2$

当$t_0 \le -1$，即$a \le -8$时，$f(x)_{\max} = g(-1) = a^2 - a - 2$

注意：同角不同幂求最值问题实际上是利用同角三角函数的关系以及换元法将函数化为一元二次函数，转化为一元二次函数给定区间求值域问题，但要注意等价换元.