《三角函数的最值问题复习课——三角函数的最值问题》扩展提升任务答案

1．解：（Ⅰ）根据题意得 $2\sin\frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2})-a=1$.

即 $2\times(1+0)-a=1$，解得 $a=1$.

又 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-1$

$=2\sin^2 x+2\sin x\cos x-1$

$=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,

得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，所以 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$.

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$,

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le 1$.

所以 $-1\le f(x)\le\sqrt{2}$.

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1.

因为不等式 $f(x)\ge m$ 恒成立等价于 $m\le f(x)_{最小值}$，

所以 $m\le -1$.

故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

2.解：（Ⅰ）$f(x)=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$

$=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$

$=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$.

因为 $y=\sin x$ 的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，

所以$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，

即$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

所以曲线$y=f(x)$的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（Ⅱ）因为$0\le x\le\frac{3\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{4}\le\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\le\pi$.

所以当$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi$，即当$x=\frac{3\pi}{2}$时，$f(x)$的最小值为$0$.

所以实数m的最大值0.

3.解：（Ⅰ）由 $\sin x+\cos x\neq 0$，

得 $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\neq 0$，

所以 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，其中$k\in\mathbf{Z}$.

所以$f(x)$的定义域为$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

（Ⅱ）因为 $f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}$

$=\cos x-\sin x$

$=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

由（Ⅰ）得 $x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，其中$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $-1<\cos(x+\frac{\pi}{4})<1$，

所以 $f(x)$的取值范围是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.