

三角函数的最值——学习任务单

北京市三里屯一中 教师：田佳

【使用说明】

三角函数是重要的数学运算工具，三角函数最值问题是三角函数中的基本内容，对三角函数的恒等变形能力及综合应用要求较高. 解决三角函数最值这类问题的基本途径，一方面应充分利用三角函数自身的特殊性（如有界性等），另一方面还要注意将求解三角函数最值问题转化为求一些我们所熟知的函数（二次函数等）最值问题. 本节课介绍几种常见的求三角函数最值的方法.

【学习目标】

1. 利用正弦函数与余弦函数的有界性求解三角函数最值；
2. 通过引入辅助角公式把三角函数化为 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的形式，再借助三角函数图象研究性质求解三角函数最值；
3. 将函数转化为关于 $\sin x$ (或 $\cos x$) 的二次函数的形式，通过配方借助二次函数的性质求解三角函数最值.

【学法指导】

1. 三角函数的最值问题，其本质是对含有三角函数的复合函数求最值，因此求函数最值的方法都能适用. 当然还有其特殊的方法.
2. 三角函数的最值都是在限定区间上取得的，因此特别要注意题设中所给出的区间. 求三角函数最值时，一般要进行一些代数变换和三角变换，要注意函数有意义的条件、函数的有界性及变换的等价性.
3. 求三角函数的最值时，代数中求最值的方法均适用，如配方法（注意三角函数的取值范围）、换元法（注意换元后的范围变化）等.

【任务一】将三角函数转化为一次函数求最值

问题 1 求函数 $y = 2 \cos x - 1$ 的值域

[分析] 此为 $y = a \cos x + b$ 型的三角函数求最值问题

解：设 $t = \cos x$ ，由三角函数的有界性得 $t \in [-1, 1]$ ，则 $y = 2t - 1 \in [-3, 1]$

【任务二】将三角函数转化为 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ (辅助角法) 求最值

问题 2 函数 $f(x) = \sin x - \cos(x + \frac{\pi}{6})$ 的值域为 ()

$$A. [-2, 2] \quad B. [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \quad C. [-1, 1] \quad D. \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

解题思路 观察三角函数名和角，先化简，使三角函数的名和角统一。

解题思路：辅助角公式 $\rightarrow f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow$ 函数有界性求值域

$$(1) \because f(x) = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$= \frac{3}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$= \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域为 } [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$$

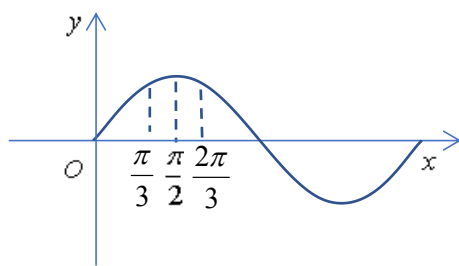
问题 3 函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 的值域是_____

解题思路

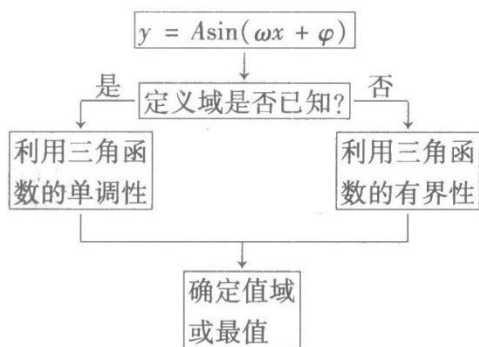
函数在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的单调性 $\rightarrow$ 求值域

$$\because x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \therefore x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1.$$



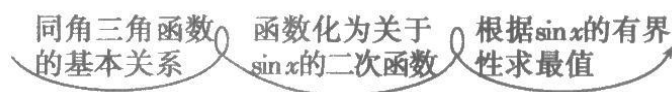
【方法点拨】三角函数 $y = A \sin(ax + \varphi)$ 值域（最值）的求解方法：



【任务三】将三角函数转化为二次函数(配方法)求最值

问题 4 函数 $y = 3\cos^2 x - 4\sin x + 1$ 的最大值和最小值分别为_____

解题思路



解析 $y = 3\cos^2 x - 4\sin x + 1 = 3 - 3\sin^2 x - 4\sin x + 1$

$$= -3\left(\sin^2 x + \frac{4}{3}\sin x\right) + 4$$

$$= -3\left(\sin x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}.$$

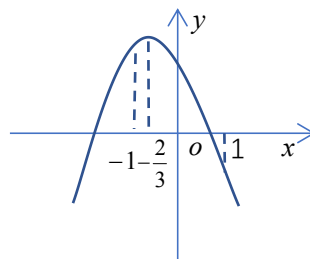
又 $\because -1 \leq \sin x \leq 1, \therefore$ 当 $\sin x = -\frac{2}{3}$ 时,

函数 $y = 3\cos^2 x - 4\sin x + 1$ 的最大值为 $\frac{16}{3}$;

当 $\sin x = 1$ 时,

函数 $y = 3\cos^2 x - 4\sin x + 1$ 的最小值为 -3 .

答案 $\frac{16}{3}$ 和 -3



【方法点拨】 有关 $\sin x, \cos x$ 的三角函数求最值的方法:

1. 将函数转化为关于 $\sin x$, (或 $\cos x$) 的二次函数的形式;
2. 通过配方借助二次函数的性质求解.

【分析】利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 将原函数转化为 $y = \cos^2 x - 3\cos x + 2$, 令 $t = \cos x$,

则 $-1 \leq t \leq 1, y = t^2 - 3t + 2$, 配方, 得 $y = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, $\because -1 \leq t \leq 1, \therefore$ 当 $t = 1$ 时, 即

$\cos x = 1$ 时, $y_{\min} = 0$