

【扩展提升任务答案及解析】

1. 若把函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称, 将其图象沿 x 轴向右平

移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则 $y = f(x) - g(x)$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【答案】D

【详解】

由于函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

所以 $\sin(-\frac{\pi}{3} + \varphi) = 0$, 即 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 整理得 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{3}$

由于 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$

则 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

将其图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$

$y = f(x) - g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \sin 2x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

当 $2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 时, 函数 $y = f(x) - g(x)$ 的最大值为 1

故选: D

2. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - a$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 2.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求它的对称中心的坐标;

(2) 先将函数 $f(x)$ 保持横坐标不变, 纵坐标变为原来的 $\frac{A}{2}$ ($A \neq 0$) 倍, 再将图象向左平移 m

($0 < m < \frac{\pi}{2}$) 个单位, 得到的函数 $g(x)$ 为偶函数. 若对任意的 $x_1 \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, 总存在 $x_2 \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$,

使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 A 的取值范围.

【详解】

$$(1) f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - a + 1 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - a + 1.$$

$$\because x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}], \therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}],$$

则当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取最大值 2, 即有 $2 - a + 1 = 2$, 得 $a = 1$.

$$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6});$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore f(x) \text{ 的对称中心的坐标为 } \left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0\right) (k \in \mathbf{Z}).$$

$$(2) g(x) = A\sin(2x + 2m + \frac{\pi}{6}),$$

$$\because g(x) \text{ 为偶函数}, \therefore 2m + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \therefore m = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{又 } \because 0 < m < \frac{\pi}{2}, \therefore m = \frac{\pi}{6}, \therefore g(x) = A\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = A\cos 2x,$$

$$\because x_1 \in [-\frac{\pi}{3}, 0], \therefore 2x_1 + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}], \therefore f(x_1) \text{ 的值域为 } [-2, 1];$$

$$\because x_2 \in [-\frac{\pi}{3}, 0], \therefore 2x_2 \in [-\frac{2\pi}{3}, 0], \therefore \cos 2x_2 \in [-\frac{1}{2}, 1],$$

$$\text{①当 } A > 0 \text{ 时, } g(x_2) \text{ 的值域为 } [-\frac{A}{2}, A],$$

$$\text{②当 } A < 0 \text{ 时, } g(x_2) \text{ 的值域为 } [A, -\frac{A}{2}],$$

而依据题意有 $f(x_1)$ 的值域是 $g(x_2)$ 值域的子集,

$$\text{则} \begin{cases} A > 0 \\ A \geq 1 \\ -\frac{A}{2} \leq -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} A < 0 \\ -\frac{A}{2} \geq 1 \\ A \leq -2 \end{cases}$$

$\therefore A \leq -2$ 或 $A \geq 4$ ，所以实数 A 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$