

《三角函数图象的综合问题》

北京市三里屯一中 骈红

【学习目标】

- (1) 能画出三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，能借助图象理解各参数的意义；
- (2) 掌握三角函数图象的伸缩变换，可根据三角函数图象求三角函数解析式；
- (3) 巩固提升数形结合思想和分析问题、解决问题的能力。

【预备知识】

1. 三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的有关概念.

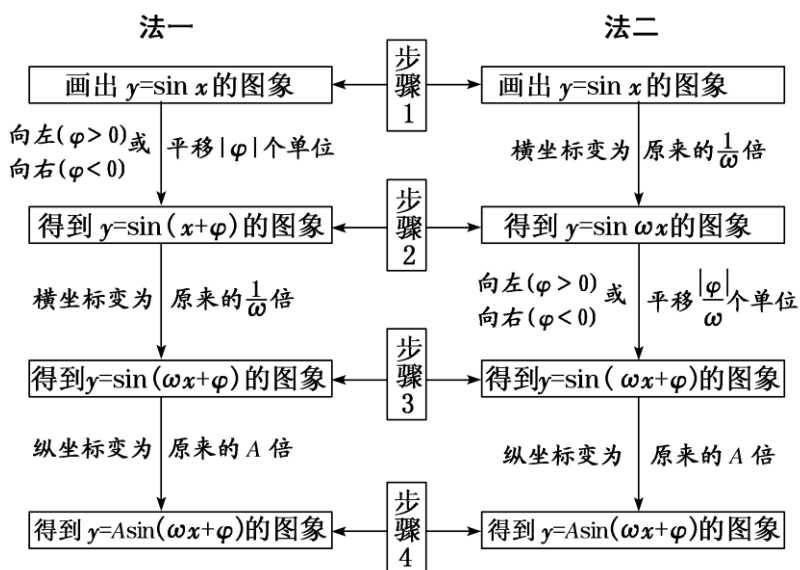
$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ $(A > 0, \omega > 0)$	振幅	周期	频率	相位	初相
	A	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$	$\omega x + \varphi$	φ

2. 用五点法画三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 一个周期内的简图.

用五点法画三角函数一个周期内的简图时，要找五个关键点，如下表所示：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{\pi - \varphi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$	$\frac{2\pi - \varphi}{\omega}$
$y = A\sin(\omega x + \varphi)$	0	A	0	$-A$	0

3. 由函数 $y = \sin x$ 的图象通过变换得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 图象的两种方法.



【学法指导】

1. 五点法作图的步骤

用“五点法”作函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的简图，精髓是通过变量代换，设 $z = \omega x + \varphi$ ，由 z 取 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 来求出相应的 x ，通过列表，计算得出五点坐标，描点后得出图象，其中相邻两点的横向距离均为 $\frac{T}{4}$ 。

2. 三角函数图象两种伸缩变换的联系与区别

联系：两种变换方法都是针对 x 而言的，即 x 本身加减多少，而不是 ωx 加减多少。

区别：先平移变换(左右平移)再周期变换(伸缩变换)，平移的量是 $|\varphi|$ 个单位，而先周期变换(伸缩变换)再平移变换(左右平移)，平移的量是 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位。

【典型例题】

【例 1】某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

(I) 请将上表数据补充完整，并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 将函数 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度，得到函数 $y = g(x)$ 的图象。若函数 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ，求 θ 的最小值；

(III) 作出函数 $f(x)$ 在长度为一个周期的闭区间上的图象。

[试题分析]

(I) 本问是利用“五点法”求三角函数解析式问题。

本问解题思路：利用“五点法”补充数据；据数据求出 A 、 ω 、 φ ，也可先求出 T ，由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 导出 ω ，最后代入特殊点坐标，求出 φ 。

(II) 本问是通过函数 $y = f(x)$ 图象平移得到新函数，求移动参数 θ ($\theta > 0$) 的问题。

本问解题思路：根据平移规则求出新函数的解析式，由三角函数对称中心公式得到 θ 的最小值。

(III) 本问是考查同学们的画图能力。

[解题过程]

(I) 根据表中已知数据, 解得 $A=5$, $\omega=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$, 数据补全如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$f(x)=A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

(II) 由 (I) 知 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$, 则 $g(x)=5\sin(2x+2\theta-\frac{\pi}{6})$.

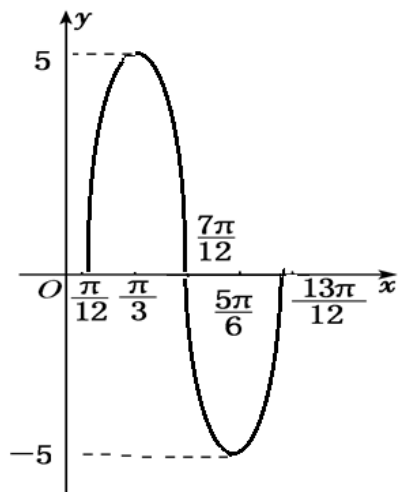
因为函数 $y=\sin x$ 图象的对称中心为 $(k\pi, 0)$, $(k \in \mathbf{Z})$,

令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta (k \in \mathbf{Z})$

由于函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 成中心对称,

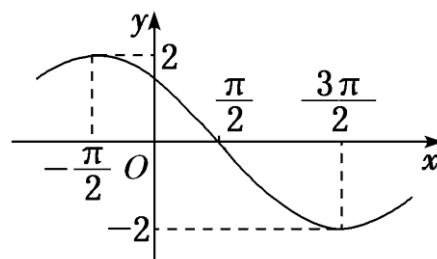
所以令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$,

(III) 由数据作出函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}]$ 上的图象如图所示,



【例 2】已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x + \varphi)$, $(A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$,

其部分图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.



[试题分析]

此题由图可看到函数图象上两个相邻的最高点与最低点，由此同学们想到了什么结论？我们可以求出 A 和 T ，从而我们得到 ω ，此时解析式里就差一个 φ ，我们可以从图象中选取一个点坐标代入，求得 φ 。

[解题过程]

由题图可知，函数图象上两个相邻的最值点分别为最高点 $(-\frac{\pi}{2}, 2)$ ，最低点 $(\frac{3\pi}{2}, -2)$ ，

所以函数的最大值为 2，即 $A=2$ 。

由图象可得直线 $x=-\frac{\pi}{2}$ ， $x=\frac{3\pi}{2}$ 为相邻的两条对称轴，

所以函数的最小正周期 $T=2\times\left[\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\pi$ ，

故 $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$ ，解得 $\omega=\frac{1}{2}$ 。

所以 $f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\varphi)$ 。

把点 $(-\frac{\pi}{2}, 2)$ 代入可得 $2\sin\left[\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi\right]=2$ ，

即 $\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})=1$ ，所以 $\varphi-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2} (k\in\mathbf{Z})$ ，

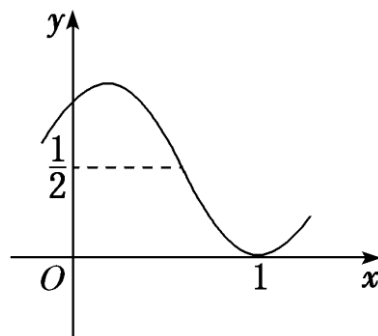
解得 $\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{4} (k\in\mathbf{Z})$ 。

又 $0<\varphi<\pi$ ，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ 。

所以 $f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})$ 。

【例 3】 如果存在正整数 ω 和实数 φ 使得函数

$f(x)=\sin^2(\omega x+\varphi)$ 的图象如图所示，图象经过点 $(1, 0)$ ，那么 ω 的值为_____。



[试题分析]

此题同学们一定要认真读题，题干中的解析式不是 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 类型，也就是我们常说的一名一次式，所以我们要通过三角函数变换化简成 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 或 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ 类型，之后要通过对图象的观察，得到 T 范围，从而解得 ω 范围，因为 ω 为正整数，所以求得 ω 的值.

[解题过程] 因为 $f(x) = \sin^2 \varphi x + \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos[2(\omega x + \varphi)]$ ，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期

$T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ ，由题图知 $\frac{T}{2} < 1$ ，且 $\frac{3T}{4} > 1$ ，即 $\frac{4}{3} < T < 2$ ，所以 $\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3T}{4}$ ，又因为 ω 为正整数，

所以 ω 的值为 2.

【小结提升】

确定函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0$) 的解析式的步骤:

(1) 求 A, B ，确定函数的最大值 M 和最小值 m ，则 $A = \frac{M - m}{2}$ ， $B = \frac{M + m}{2}$.

(2) 求 ω ，确定函数的周期 T ，则 $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(3) 求 φ ，常用方法有

① 代入法：把图象上的一个已知点代入(此时要注意该点在上升区间上还是在下降区间上)或把图象的最高点或最低点代入.

② 五点法：确定 φ 值时，往往以寻找“五点法”中的特殊点作为突破口.

【学法建议】

1. 画三角函数图象，要掌握“五点法”画图，是重要方法；
2. 三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的有关参数 A, T, ω, φ 的意义要清楚；
3. 关注各类问题的解析策略，不能“死记硬背”，要根据题目给出的函数特点，前后问的关系，灵活运用方法求解；
4. 数形结合思想的应用.