

课题：概率统计中——超几何分布与二项分布

【学习目标】

1. 进一步了解并熟悉超几何分布与二项分布产生的实际背景，理解超几何分布的导出过程，理解独立重复试验与二项分布的关系，进一步建构并完善知识体系与结构；
2. 明确两种分布基本特征，能正确区分两种分布，能准确运用两种概率分布分析实际问题；
3. 通过自主学习，熟化基本知识与思想方法，完成知识体系建构，提升学生运算能力、数学阅读与理解能力，分析与解决问题的能力。

【学法指导】

【任务一】——温故知新

一、超几何分布的概念与基本公式

1. 总产品数 N 件，次品 M 件，从中取 n 件，其中含次品 X 件，则 $X \sim H(n, M, N)$ 。
2. 概率与均值公式：
$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, (k = 0, 1, 2, \dots, \min(M, n)), \quad EX = \frac{nM}{N}.$$
3. 判断一个随机变量是否服从超几何分布的关键要素

二、 n 次独立重复试验的特征

每次试验相同条件、相互独立、两种结果（发生与不发生）、事件发生概率不变。

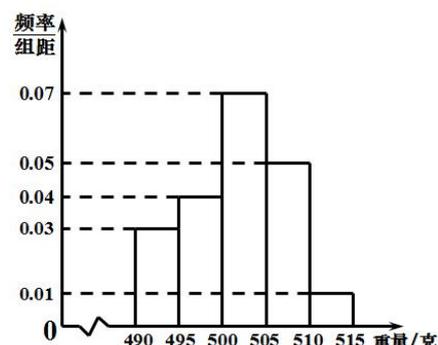
三、二项分布的概念与基本公式

1. n 次独立重复试验中，事件 A 发生概率为 p ，事件 A 发生的次数为 X ，则 $X \sim B(n, p)$ 。
2. 概率与均值公式：
$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad EX = np.$$
3. 判断一个随机变量是否服从二项分布的关键要素

【任务二】——例题示范深化理解

例. 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况，随机抽取该流水线上 40 件产品作为样本，称出它们的重量(单位:克)，重量的分组区间为 $(490, 495]$ ， $(495, 500]$ ， \dots ， $(510, 515]$ ，由此得到样本的频率分布直方图，如图 4 所示。

- (1) 在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件，设 X 为重量超过



505 克的产品数量，求 X 的分布列.

(2) 从流水线上任取 5 件产品，求产品的重量超过 505 克的产品数量 Y 的期望.

解析：(1) 40 件产品重量超过 505 克的有 $(0.05 + 0.01) \times 5 \times 40 = 12$ 件

X 的取值为 $0, 1, 2$

$$P(X=0) = \frac{C_{28}^2}{C_{40}^2} = \frac{63}{130}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{28}^1 C_{12}^1}{C_{40}^2} = \frac{56}{130} = \frac{28}{65}$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2}{C_{40}^2} = \frac{11}{130}$$

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{63}{130}$	$\frac{28}{65}$	$\frac{11}{130}$

(2) 由频率分布直方图可知，1 件产品重量超过 505 克的频率是：

$$(0.05 + 0.01) \times 5 = 0.3$$

Y 的取值为 $0, 1, 2$

$$P(Y=0) = C_2^0 0.7^2 = 0.49$$

$$P(Y=1) = C_2^1 0.3 \times 0.7 = 0.42$$

$$P(Y=2) = C_2^2 0.3^2 = 0.09$$

所以 Y 的分布列为：

X	1	2	3
P	0.49	0.42	0.09

$$\therefore E(Y) = 0 \times 0.49 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.09 = 0.6$$

反馈练习：

(2018 北京东城期中, 16) 袋子里有完全相同的 3 个红球和 4 个黑球，

现从袋子里随机取球；

(1) 若有放回地取 3 次，每次取一个球，求取出 2 个红球 1 个黑球的概率；

(2) 若无放回地取 3 次，每次取一个球，取出 1 个红球得 2 分，取出 1 个黑球得

1分,求得分 ξ 的分布列和数学期望.

解析: (1)从袋子里有放回地取3次球,相当于做了3次独立重复试验,每次试验取出红球的概率均为 $\frac{3}{7}$,设事件A=“取出

2个红球1个黑球”,则 $P(A) = C_3^2 \left(\frac{3}{7}\right)^2 \frac{4}{7} = \frac{108}{343}$

所以取出2红球1黑球的概率是 $\frac{108}{343}$

(2) ξ 的取值有四个:3、4、5、6,

$$P(\xi = 3) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$$

$$P(\xi = 4) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$P(\xi = 5) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

随机变量 ξ 的分布列为

ξ	3	4	5	6
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

【任务三】——总结升华

二项分布与超几何分布的区别与联系:

	超几何分布	二项分布
相同点	都是古典概型,符合基本事件个数有限,且每一个基本事件发生都是等可能的	

不同点	超几何分布需要知道总体的容量，而二项分布不需要	超几何分布是“不放回”抽取，而二项分布是“有放回”抽取
关 联	当超几何分布总体容量较大时，可以看做是二项分布	

本节课我们复习的知识主题是什么？应用时应怎样鉴别并注意避免哪些失误？