

立体几何单元检测答案

(1) (B)

(2) (C)

(3) (B)

(4) (B)

(5) (D)

(6) (I) 方法一: 连结 BC_1

因为 D, E 分别为 A_1C_1, B_1C_1 中点, 所以 $DE \parallel A_1B_1$

又因为 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $DE \parallel AB$

因为 E, F 分别为 B_1C_1, B_1B 中点, 所以 $EF \parallel BC_1$

又因为 $DE \cap EF = E$ $DE \subset$ 平面 DEF , $EF \subset$ 平面 DEF

$AB \subset$ 平面 ABC_1 , $BC_1 \subset$ 平面 ABC_1

所以平面 $ABC_1 \parallel$ 平面 DEF

又 $AC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , 所以 $AC_1 \parallel$ 平面 DEF

方法二: 取 AA_1 中点为 G , 连结 FG

由 $AA_1 \parallel BB_1$ 且 $AA_1 = BB_1$ 又点 F 为 BB_1 中点, 所以 $FG \parallel A_1B_1$

又因为 D, E 分别为 A_1C_1, B_1C_1 中点, 所以 $DE \parallel A_1B_1$ 所以 $DE \parallel FG$

所以 D, E, F, G 共面于平面 DEF

因为 D, G 分别为 A_1C_1, AA_1 中点, 所以 $AC_1 \parallel DG$

$AC_1 \not\subset$ 平面 DEF , $DG \subset$ 平面 DEF 所以 $AC_1 \parallel$ 平面 DEF

方法三: 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC

又因为 $AC \perp BC$

以 C 为原点, 分别以 CA, CB, CC_1 为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $C - xyz$

由题意得 $A(2, 0, 0), C_1(0, 0, 2), D(1, 0, 2), E(0, 1, 2), F(0, 2, 1)$.

所以 $\overrightarrow{DE} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{EF} = (0, 1, -1)$

设平面 DEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -x_1 + y_1 = 0 \\ y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$

令 $x_1 = 1$, 得 $y_1 = 1, z_1 = 1$ 于是 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$

又因为 $\overrightarrow{AC_1} = (-2, 0, 2)$ 所以 $\overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n} = -2 + 0 + 2 = 0$

又因为 $AC_1 \not\subset$ 平面 DEF , 所以 $AC_1 \parallel$ 平面 DEF

(II) 方法一: 在直棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC

因为 $AC \subset ABC$, 所以 $CC_1 \perp AC$

又因为 $AC \perp BC$, 且 $CC_1 \cap BC = C$ 所以 $AC \perp$ 平面 BB_1C_1C

$EF \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $AC \perp EF$

又 $BC = CC_1$, 四边形 BB_1C_1C 为正方形 所以 $BC_1 \perp B_1C$

又 $BC_1 // EF$, 所以 $B_1C \perp EF$

又 $AC \perp EF$, 且 $AC \cap B_1C = C$ 所以 $EF \perp$ 平面 ACB_1

又 $EF \subset$ 平面 DEF 所以平面 $ACB_1 \perp$ 平面 DEF

方法二: 设平面 ACB_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$, $\overrightarrow{CB_1} = (0, 2, 2)$

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ 2y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases}$$

令 $y_2 = 1$, 得 $x_2 = 0, z_2 = -1$ 于是 $\mathbf{m} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = (1, 1, 1) \cdot (0, 1, -1) = 0$

即 $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$, 所以平面 $ACB_1 \perp$ 平面 DEF

(III) 设直线 DP 与平面 ACB_1 所成角为 θ , 则 $\theta = 30^\circ$

设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AA_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) , 则 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2\lambda)$, $\overrightarrow{DP} = (1, 0, 2\lambda - 2)$

$$\text{所以 } |\cos \theta| = \frac{|\overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{DP}| |\mathbf{m}|} = \frac{|2 - 2\lambda|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + (2\lambda - 2)^2}} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = \frac{3}{2}$ (舍)

所以点 P 存在, 即 AA_1 的中点, $AP = 1$

(7) (I) 因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AB$,

$AB \perp BC$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

因为 $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $BC \perp AA_1$.

(II) 取 A_1B_1 的中点 N , 连结 BN .

平行四边形 ABB_1A_1 中 $AB = AA_1$, $\angle BAA_1 = 60^\circ$. 易证 $BN \perp A_1B_1$.

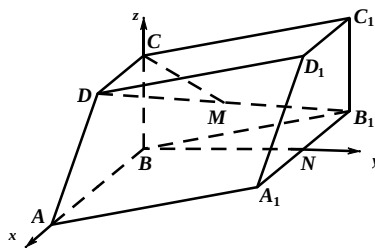
由 (I) 知 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

故以为 B 原点, BA , BN , BC 所在直线为坐标轴,

建立如图所示空间直角坐标系 $B - xyz$.

依题意, $A(2, 0, 0)$, $A_1(1, \sqrt{3}, 0)$, $D(1, 0, 1)$,

设平面 DAA_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{AA_1} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1)$



则 $A_1(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(1, -\frac{1}{2}, 0)$, $C(1, \frac{1}{2}, 0)$, $D(0, \frac{1}{2}, 0)$, $E(0, -\frac{1}{2}, 0)$5 分

$$\overrightarrow{A_1B} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \overrightarrow{A_1D} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \overrightarrow{DC} = (1, 0, 0),$$

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

令 $z = 1$ 得, $y = \sqrt{3}$, 所以 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$ 是平面 A_1CD 的一个方向量.7 分

$$\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \quad \text{.....9 分}$$

所以 A_1B 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$10 分

解二: 在平面 A_1DE 内作 $EF \perp ED$, 由 $BE \perp$ 平面 A_1DE , 建系如图.

则 $A_1(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 0)$5 分

$$\overrightarrow{A_1B} = (1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \overrightarrow{A_1D} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \overrightarrow{DC} = (1, 0, 0),$$

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

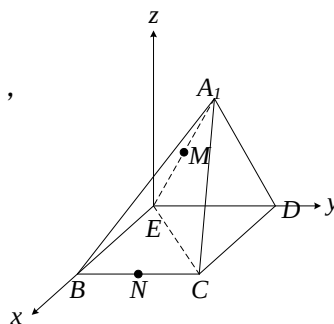
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

令 $z = 1$ 得, $y = \sqrt{3}$,

所以 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$ 是平面 A_1CD 的一个方向量.7 分

$$\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \quad \text{.....9 分}$$

所以 A_1B 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$10 分



(III) 三棱锥 $M - A_1CD$ 和三棱锥 $N - A_1CD$ 的体积相等. 理由如下:

方法一: 由 $M(0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $N(1, \frac{1}{2}, 0)$, 知 $\overrightarrow{MN} = (1, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, 则 $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0$ 11 分

因为 $MN \not\subset$ 平面 A_1CD ,12 分

所以 $MN \parallel$ 平面 A_1CD13 分

故点 M 、 N 到平面 A_1CD 的距离相等，有三棱锥 $M - A_1CD$ 和 $N - A_1CD$ 同底等高，
所以体积相等.14 分

方法二：如图，取 DE 中点 P ，连接 MP ， NP ， MN 。

因为在 $\triangle A_1DE$ 中， M ， P 分别是 A_1E ， DE 的中点，所以 $MP \parallel A_1D$

因为在正方形 $BCDE$ 中， N ， P 分别是 BC ， DE 的中点，所以 $NP \parallel CD$

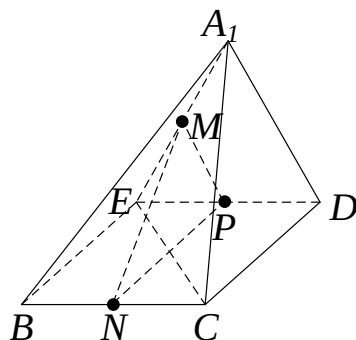
因为 $MP \cap NP = P$ ， MP ， $NP \subset$ 平面 MNP ， A_1D ， $CD \subset$ 平面 A_1CD

所以平面 $MNP \parallel$ 平面 A_1CD 11 分

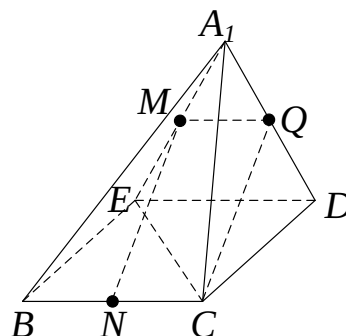
因为 $MN \subset$ 平面 MNP ，12 分

所以 $MN \parallel$ 平面 A_1CD 13 分

故点 M 、 N 到平面 A_1CD 的距离相等，有三棱锥 $M - A_1CD$ 和 $N - A_1CD$ 同底等高，
所以体积相等.14 分



法二



法三

方法三：如图，取 A_1D 中点 Q ，连接 MN ， MQ ， CQ 。

因为在 $\triangle A_1DE$ 中， M ， Q 分别是 A_1E ， A_1D 的中点，所以 $MQ \parallel ED$ 且 $MQ = \frac{1}{2}ED$

因为在正方形 $BCDE$ 中， N 是 BC 的中点，所以 $NC \parallel ED$ 且 $NC = \frac{1}{2}ED$

所以 $MQ \parallel NC$ 且 $MQ = NC$ ，故四边形 $MNCQ$ 是平行四边形，故 $MN \parallel CQ$ 11 分

因为 $CQ \subset$ 平面 A_1CD ， $MN \not\subset$ 平面 A_1CD ，12 分

所以 $MN \parallel$ 平面 A_1CD 。13 分

故点 M 、 N 到平面 A_1CD 的距离相等，有三棱锥 $M - A_1CD$ 和 $N - A_1CD$ 同底等高，
所以体积相等.14 分