巩固性作业答案

1. 解：（Ⅰ）因为在$\triangle ABC$中，$D$，$E$分别为$AB$，$AC$的中点，

所以 $DE // BC$，$AD = AE$．

所以$A_1D = A_1E$，又$O$为$DE$的中点，所以 $A_1O \perp DE$．［1 分］

因为平面$A_1DE \perp$平面$BCED$，且$A_1O \subset$平面$A_1DE$，

所以 $A_1O \perp$平面$BCED$，［3 分］

所以 $A_1O \perp BD$．［4 分］

（Ⅱ）取$BC$的中点$G$，连接$OG$，所以$OE \perp OG$．

由（Ⅰ）得$A_1O \perp OE$，$A_1O \perp OG$．

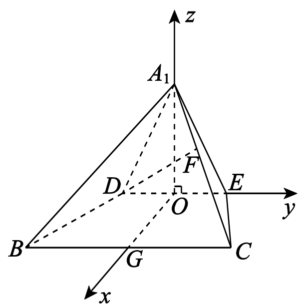
如图建立空间直角坐标系$O-xyz$．［5 分］

由题意得，$A_1(0,0,2)$，$B(2,-2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,-1,0)$．

所以$\overrightarrow{A_1B} = (2,-2,-2)$，$\overrightarrow{A_1D} = (0,-1,-2)$，$\overrightarrow{A_1C} = (2,2,-2)$．

设平面$A_1BD$的法向量为$\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases}$即$\begin{cases} 2x-2y-2z=0, \\ -y-2z=0. \end{cases}$




令$x=1$，则$y=2$，$z=-1$，所以$\boldsymbol{n} = (1,2,-1)$．［7 分］

设直线$A_1C$和平面$A_1BD$所成的角为$\theta$，

则$\sin\theta = |\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{A_1C} \rangle| = \dfrac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{A_1C}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1C}|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

所以 直线$A_1C$和平面$A_1BD$所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．［9 分］

（Ⅲ）线段$A_1C$上存在点$F$适合题意．

设$\overrightarrow{A_1F} = \lambda \overrightarrow{A_1C}$，其中$\lambda \in [0,1]$．［10 分］

设$F(x_1, y_1, z_1)$，则有$(x_1, y_1, z_1 - 2) = (2\lambda, 2\lambda, -2\lambda)$，

所以$x_1 = 2\lambda, y_1 = 2\lambda, z_1 = 2 - 2\lambda$，从而$F(2\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda)$，

所以$\overrightarrow{DF} = (2\lambda, 2\lambda+1, 2-2\lambda)$，又$\overrightarrow{BC} = (0,4,0)$，

所以$|\cos\langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{BC} \rangle| = \dfrac{|\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{4|2\lambda+1|}{4\sqrt{(2\lambda)^2 + (2\lambda+1)^2 + (2-2\lambda)^2}}$．［12 分］

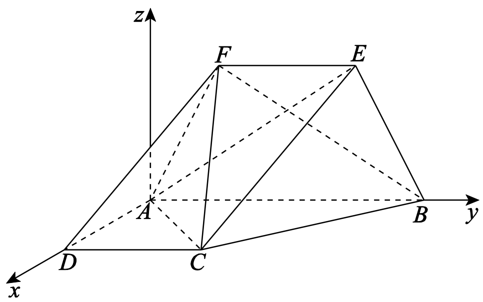
令 $\dfrac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

整理得 $3\lambda^2-7\lambda+2=0$．［13 分］

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，舍去 $\lambda=2$．

所以 线段 $A_1C$ 上存在点 $F$ 适合题意，且 $\dfrac{A_1F}{A_1C}=\dfrac{1}{3}$．［14 分］

2. 解：（Ⅰ）因为 $CD // EF$，且 $CD=EF$，




所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

所以 $DF // CE$．　　　　…… 2 分

因为 $DF \not\subset$ 平面 $BCE$，…… 3 分

所以 $DF //$ 平面 $BCE$．…… 4 分

（Ⅱ）在平面 $ABEF$ 内，过 $A$ 作 $Az \perp AB$．

因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$，

又 $Az \subset$ 平面 $ABEF$，$Az \perp AB$，

所以 $Az \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AD \perp AB$，$AD \perp Az$，$Az \perp AB$．

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$．　　　　………………… 5 分

由题意得，$A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,3,\sqrt{3})$，$F(0,1,\sqrt{3})$．

所以 $\overrightarrow{BC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{3})$．

设平面 $BCF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$　即 $\begin{cases}2x-2y=0,\\ -3y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=1$，$z=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{3})$．　　　　………………… 7 分

平面 $ABF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$，　　　　……………… 8 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

所以 二面角 $C-BF-A$ 的余弦值 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．　　　　……………10 分

（III）线段 $CE$ 上不存在点 $G$，使得 $AG \perp$ 平面 $BCF$，理由如下：…………………11 分

解法一：设平面 $ACE$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_1+2y_1=0, \\ 3y_1+\sqrt{3}z_1=0. \end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$． ………………13 分

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$，

所以 平面 $ACE$ 与平面 $BCF$ 不可能垂直，

从而线段 $CE$ 上不存在点 $G$，使得 $AG \perp$ 平面 $BCF$． ………………14 分

解法二：线段 $CE$ 上不存在点 $G$，使得 $AG \perp$ 平面 $BCF$，理由如下：………11 分

假设线段 $CE$ 上存在点 $G$，使得 $AG \perp$ 平面 $BCF$，

设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 $\lambda\in[0,1]$．

设 $G(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则有 $(x_2-2,\ y_2-2,\ z_2)=(-2\lambda,\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

所以 $x_2=2-2\lambda$，$y_2=2+\lambda$，$z_2=\sqrt{3}\lambda$，从而 $G(2-2\lambda,\ 2+\lambda,\ \sqrt{3}\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$． ………………13 分

因为 $AG \perp$ 平面 $BCF$，所以 $AG // \boldsymbol{n}$．

所以有 $\dfrac{2-2\lambda}{1}=\dfrac{2+\lambda}{1}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$，

因为 上述方程组无解，所以假设不成立．

所以 线段 $CE$ 上不存在点 $G$，使得 $AG \perp$ 平面 $BCF$． …………14 分