立体几何探索性问题

一、2019 考试说明

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">考试内容</th><th colspan="3">要求层次</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td rowspan="4">空间向量的应用</td><td>直线的方向向量</td><td></td><td>√</td><td></td></tr>
<tr><td>平面的法向量</td><td></td><td>√</td><td></td></tr>
<tr><td>线、面位置关系</td><td></td><td></td><td>√</td></tr>
<tr><td>线线、线面、面面的夹角</td><td></td><td></td><td>√</td></tr>
</table>

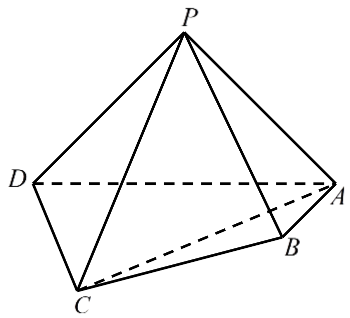
二、学习目标

1. 在掌握向量法解决常规立体问题（位置关系、角）基础上，理解探索性问题的类型和解题策略；
2. 能借助逻辑推理，将要探求的问题恰当转化为常规问题进行计算；
3. 注意问题类型，合理补充定理条件，并规范解答.

三、例题分析

几何学研究几何体的形状、大小、位置关系，在研究位置关系时，除了证明平行或垂直，还会遇到“寻找平行或垂直的条件”问题，即“探索性问题”，这类问题该如何分析？

例 1. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，$AB\perp AD$，$AB=1$，$AD=2$，$AC=CD=\sqrt{5}$.




（Ⅰ）求证：$PD\perp$ 平面 $PAB$；

（Ⅱ）求直线 $PB$ 与平面 $PCD$ 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在棱 $PA$ 上是否存在点 $M$，使得 $BM\parallel$ 平面 $PCD$？

若存在，求 $\dfrac{AM}{AP}$ 的值；若不存在，说明理由.

关键点：

（1）棱 $PA$ 上

（2）$BM\parallel$ 平面 $PCD$

（3）求 $\dfrac{AM}{AP}$ 的值

解题引导

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 由 $M$ 在棱 $PA$ 上设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$，由 $\lambda$ 表示 $M$ 坐标 | $\Longrightarrow$ | 利用平行关系求 $\lambda$ | $\Longrightarrow$ | 根据方程的解的情况和 $\lambda\in[0,1]$ 求解问题 |

（Ⅰ）（Ⅱ）提供答案，重点分析（Ⅲ）

解：（Ⅰ）因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\perp AD$，

所以 $AB\perp$ 平面 $PAD$． 所以 $AB\perp PD$．

又因为 $PA\perp PD$，所以 $PD\perp$ 平面 $PAB$．

（Ⅱ）取 $AD$ 的中点 $O$，连结 $PO,\ CO$．

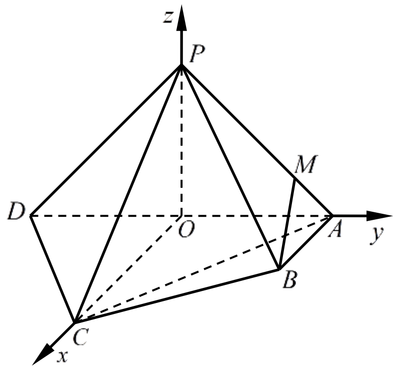
因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$．

又因为 $PO\subset$ 平面 $PAD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$．

因为 $CO\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp CO$．

因为 $AC=CD$，所以 $CO\perp AD$．

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$．由题意得，$A(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C(2,0,0)$，$D(0,-1,0)$， $P(0,0,1)$．




设平面 $PCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y-z=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$

令 $z=2$，则 $x=1$， $y=-2$．

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$．

又 $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

所以直线 $PB$ 与平面 $PCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

（Ⅲ）法 1：设 $M$ 是棱 $PA$ 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$．

因此点 $M(0,1-\lambda,\lambda)$， $\overrightarrow{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$．

因为 $BM\not\subset$ 平面 $PCD$，所以 $BM$ // 平面 $PCD$ 当且仅当 $\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

即 $(-1,-\lambda,\lambda)\cdot(1,-2,2)=0$． 解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$．

所以在棱 $PA$ 上存在点 $M$ 使得 $BM$ // 平面 $PCD$，此时 $\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{1}{4}$．

法 2：通过线线平行找线面平行

$BM$ 不平行 $CD,CP,DP$，$BM$ ,只能平行于平面 $CDP$ 内的另外一条直线，而这条直线应该是过直线 $BM$ 的平面与平面 $CDP$ 的交线.

分析：$BM$ // 平面 $PCD\Leftarrow BM$ // $EF\Leftarrow EFBM$ 为平行四边形

$$\Uparrow$$

$$EM \,//\, BF \text{ 且 } EM=BF$$

此法可行；

法 3：通过面面平行找线面平行

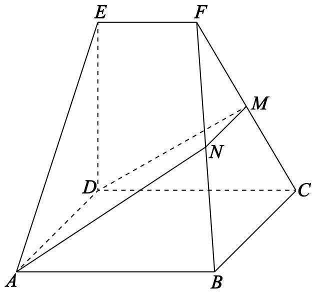
通过找平行线的方法找一个平行于平面 $CDP$ 的平面，

因为底面是确定的不规则的四边形，需要研究底面四边形的几何性质，

所以要先找出 $BN$ 平行于 $CD$，进而确定 $N$ 在 $AD$ 边上的具体位置

（这是难点）

例 2.如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$EF // CD$，$CD \perp EA$，$CD = 2EF = 2$，$ED = \sqrt{3}$．$M$ 为棱 $FC$ 上一点，平面 $ADM$ 与棱 $FB$ 交于点 $N$．




（Ⅰ）求证：$AD//MN$；

（Ⅱ）若 $AD \perp ED$，试问平面 $BCF$ 是否可能与平面 $ADMN$ 垂直？

若能，求出 $\dfrac{FM}{FC}$ 的值；若不能，说明理由.

关键点：

（1）棱 $FC$ 上

（2）平面 $BCF \perp$ 平面 $ADMN$

（3）求 $\dfrac{FM}{FC}$ 的值

$FC \perp$ 面 $ADMN \Leftarrow FC \perp AD$

$FC \perp DM$

$DM \perp$ 面 $FBC \Leftarrow DM \perp BC$

解题引导

| 由 $M$ 在棱 $FC$ 上设 $\overline{FM} = \lambda \overline{FC}$，由 $\lambda$ 表示 $M$ 坐标 | $\Longrightarrow$ | 利用垂直关系求 $\lambda$ | $\Longrightarrow$ | 根据方程的解的情况和 $\lambda \in [0,1]$ 求解问题 |
|---|---|---|---|---|

易错点：平面 $ADMN$ 的法向量

分析：既然题目中问“面面能否垂直”，那么，我们就应该将

其转化为“线面垂直”乃至“线线垂直”了.下面，如何由“面面垂直”过渡到

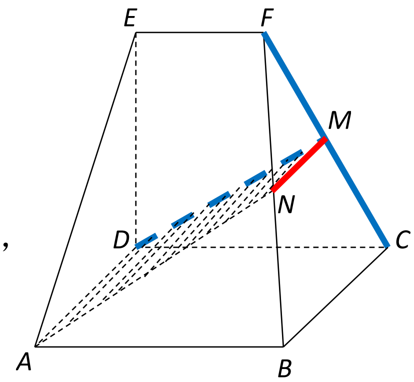
“线面垂直”和“线线垂直”.

若平面 $ADMN \perp$ 平面 $BCF$，

因为平面 $ADMN \cap$ 平面 $BCF = MN$，

下面，我们要在平面 $ADMN$ 内找一条直线垂直于 $MN$，

或者平面 $BFC$ 内找一条直线垂直于 $MN$．



根据几何体的特点，应该锁定在直线$DM$ 或者$CF$ .

这个几何体是什么特点?

根据已知条件可以证明直线$DA,DC,DE$两两互相垂直.

因为$AD\perp ED$， $AD\perp CD$ ，所以$AD\perp$平面$CDEF$ .

所以$AD\perp FC$ .

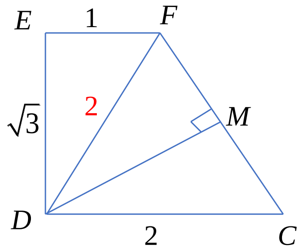
因为$AD//MN$，所以$MN\perp FC$ .

又因为$FC\subset$平面$BCF$ ,

所以$FC\perp$平面$ADMN$，(至此，我们把面面垂直转化到线面垂直)

又因为$DM\subset$平面$ADMN$， 故得$DM\perp FC$ .

至此，我们已经把“面面垂直”转化为了“线线垂直”.




即：若平面$ADMN\perp$平面$BCF$， 只需$DM\perp FC$ .

在梯形$CDEF$ 中，连接$DF$，

因为$EF//CD$，$ED\perp CD$，$CD=2EF=2$，$ED=\sqrt{3}$，

所以 $DF=DC=2$ .

所以若使$DM\perp FC$能成立，则$M$ 为$FC$的中点.

所以. $\dfrac{FM}{FC}=\dfrac{1}{2}$

四、课堂小结、习题反馈:

结论改变：使得：线面平行、垂直；线线平行垂直，面面平行垂直.

使得：线线、线面、面面成角大小问题…

条件改变：在棱上、在面上、在线段上、在直线上；包括端点，不包括端点… .

逐一分析，该用向量计算什么问题

归纳总结:

解决平行、垂直有关的探索性问题的基本策略为

(1)先假设题中的关系存在或结论成立，然后在此基础上建立方程并求解方程，若能计算出与条件吻合的数据，说明假设成立，即存在；若方程的解与条件相矛盾的结果，则说明假设不成立，即不存在.

(2)建构平行垂直的定理体系，理解多个定理之间的逻辑关系，关注不同几何对象的位置关系的分析，体会数量关系在几何问题的分析中的重要性，逐步理解数量关系与位置关系的关系.