《数形结合思想》教学设计

【学习目标】

1.学会以数解形、以形助数、数形结合思想进行数学思考和解决问题，形成用数形结合的思想解决问题的意识.

2.通过运用数形结合的思想解题，领会数形结合转化问题的思想方法.

3.通过本节课的学习，提高分析问题和解决问题的能力. 渗透理论联系实际、从特殊到一般、把未知转化为已知的数学思想.

【预备知识】

1. 基本函数图像及其变换方法.

2. 向量的基本运算及相关性质.

3. 三角恒等变换及相关公式.

【内容分析】

一　数形结合思想:数形结合是数学解题中常用的思想方法，所谓数形结合，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.

数形结合思想通过“以形助数，以数解形”，使复杂问题简单化,抽象问题具体化，能避免复杂的计算与推理，大大简化了解题过程,还有助于把握数学问题的本质，它是数学的规律性与灵活性的有机结合.

二　数形结合的应用大致可分为两种情形：

以形助数:借助形的几何直观性来阐明数与数之间的某种关系.

以数解形:借助于数的精确性来阐述形的某些属性.

三　转换数与形的三条途径：

① 建系，通过坐标系的建立，引入坐标运算.

② 转化，通过分析数与式的结构特点，把问题转化到另一个角度来考虑.

③ 构造，比如构造一个几何图形，构造一个函数，构造一个图表等.

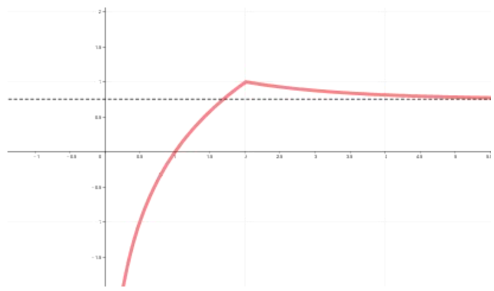
【典型例题】

引例 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x+\frac{3}{4}, x\geq 2,\\ \log_2 x, 0<x<2.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-k$ 有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围是________.

转化要点 1: $g(x)=f(x)-k$ 的零点个数即 $y=f(x)$ 与 $y=k$ 的交点个数.

转化要点 2: $f(x)$ 的图像的准确性.

【解析】数形结合，由图可知 k 的取值范围是 $(\frac{3}{4},1)$.

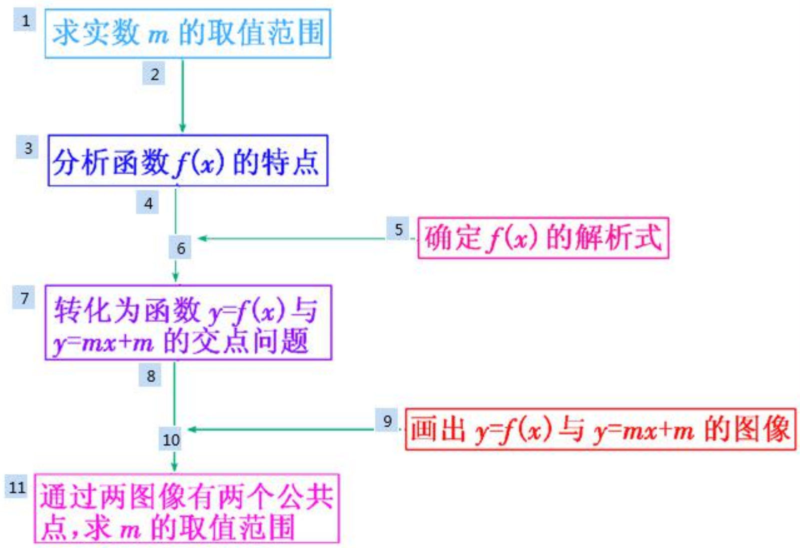


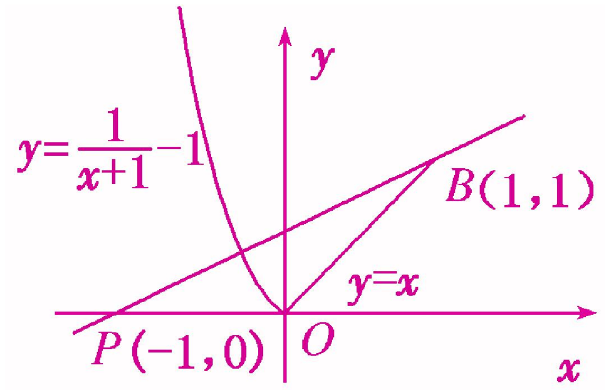
应用一 数形结合思想在解决方程的根或函数零点问题中的应用

例一(1)若 $f(x)+1=\dfrac{1}{f(x+1)}$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x$，若在区间 $(-1,1]$ 内 $g(x)=f(x)-mx-m$ 有两个零点，则实数 m 的取值范围是　　　　（　　）

A. $\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$　　　　B. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　　　C. $\left[0,\dfrac{1}{3}\right)$　　　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

[思维流程]





转化要点:1. $g(x)$ 零点的个数即为函数 $f(x)$ 与 $y=mx+m$ 图像交点的个数.

2.作出函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1]$ 内的图像.

[解析]　当 $x\in(-1,0]$ 时，$x+1\in(0,1]$，∵当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x$，∴ $f(x+1)=x+1$.

而由 $f(x)+1=\dfrac{1}{f(x+1)}$，可得 $f(x)=\dfrac{1}{f(x+1)}-1=\dfrac{1}{x+1}-1$（$x\in(-1,0]$）. 如图所示，作出函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1]$ 内的图像，而函数 $g(x)$ 零点的个数即为函数 $f(x)$ 与 $y=mx+m$ 图像交点的个数，显然函数 $y=mx+m$ 的图像为经过点 $P(-1,0)$，斜率为 m 的直线.

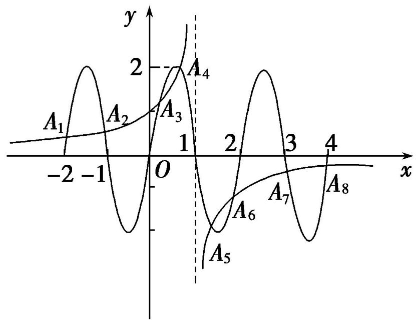
如图所示，$f(1)=1$，故 $B(1,1)$. 直线 PB 的斜率 $k_1=\dfrac{1-0}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}$；直线 PO 的斜率为 $k_2=0$.

由图可知，函数 $f(x)$ 与 $y=mx+m$ 的图像有两个交点，则直线 $y=mx+m$ 的斜率 $k_1<m\le k_2$，即 $m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.　答案 D.

(2)函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的图象与函数 $y=2\sin\pi x(-2\le x\le 4)$ 的图象所有交点的横坐标之和等于(　)

A．2　　　　B．4

C．6　　　　D．8



转化要点：两个函数图像有相同的对称中心(1, 0)

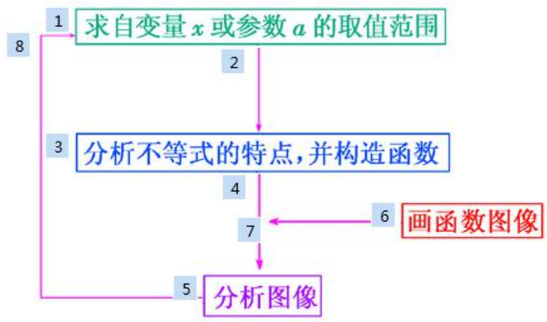
[解析]　依题意：两函数的图象如图所示：

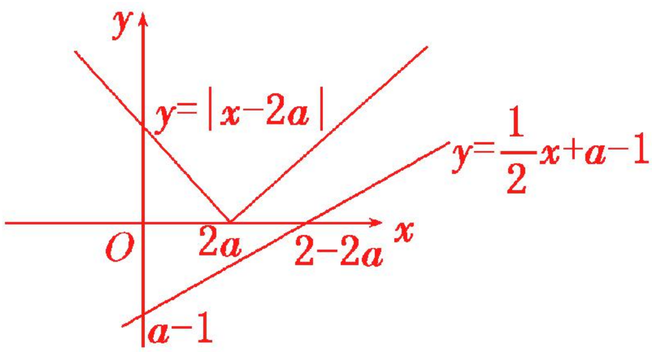
由两函数的对称性可知：交点 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8$ 的横坐标满足 $x_1+x_8=2$，$x_2+x_7=2$，$x_3+x_6=2$，$x_4+x_5=2$，即 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=8$，故选D.

应用二 数形结合思想在解不等式或求参数问题中的应用

例二(1)若不等式 $|x-2a|\ge\dfrac{1}{2}x+a-1$ 对 $x\in R$ 恒成立，则 a 的取值范围是____________.

[思维流程]





转化要点：把不等式问题转化为两个函数图像位置问题.

解析：作出 $y=|x-2a|$ 和 $y=\dfrac{1}{2}x+a-1$ 的简图，依题意知应有 $2a\le 2-2a$，故 $a\le\dfrac{1}{2}$.

答案：$a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$

(2)设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是（　）

A．$(\frac{1}{3},1)$　　B．$(-\infty,\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$　　C．$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D．$(-\infty,-\frac{1}{3})(\frac{1}{3},+\infty)$

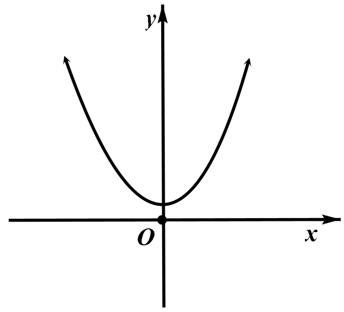
转化要点：利用函数奇偶性与单调性结合绝对值的几何意义，构造不等式解决。

【解析】由 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$ 可知 $f(x)$ 是偶函数，

且在 $[0,+\infty)$ 是增函数.

所以 $f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow f(|x|)>f(|2x-1|)\Leftrightarrow |x|>|2x-1|$.

解得 $\dfrac{1}{3}<x<1$.



应用三 数形结合思想在最值问题中的应用

例三（1）若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=0$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\bullet(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\le 0$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最大值为（　　）

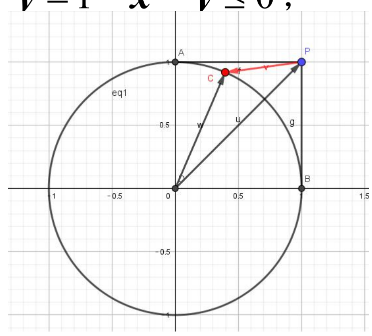
A. $\sqrt{2}-1$　　B.1　　C. $\sqrt{2}$　　D.2

【解析】方法一:因为 $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=0$,所以不妨设设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0),\boldsymbol{b}=(0,1),\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,向量 $\boldsymbol{c}$ 在 $x^2+y^2=1$ 上.$\because\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(1-\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y}),\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(-\boldsymbol{x},1-\boldsymbol{y})$,

则 $\therefore (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\bullet(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(1-\boldsymbol{x})(-\boldsymbol{x})+(-\boldsymbol{y})(1-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=1-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\le 0$,

即 $x+y\ge 1$，又 $\because\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1-\boldsymbol{x},1-\boldsymbol{y})$,

$\therefore\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{(1-\boldsymbol{x})^2+(1-\boldsymbol{y})^2}$ ①,



如图 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 对应点在 $\overset{\frown}{AB}$ 上,

而①式的几何意义为 P 点到 $\overset{\frown}{AB}$ 上点的距离，其最大值为 1.

方法二: $\because\ |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=0$,

$\because\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=2$，$\therefore\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$

展开 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\bullet(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\le 0$，得 $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2\le 0$,

整理得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}\ge 1$,

而 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+\boldsymbol{c}^2-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}}\le\sqrt{2+1-2}=1$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\le 1$

2.当$0 < x < \frac{\pi}{2}$，函数$f(x) = \frac{1+\cos 2x + 4\sin^2 x}{\sin 2x}$的最小值为　　　　(　　)

A．-4　　　　B．$-2\sqrt{2}$

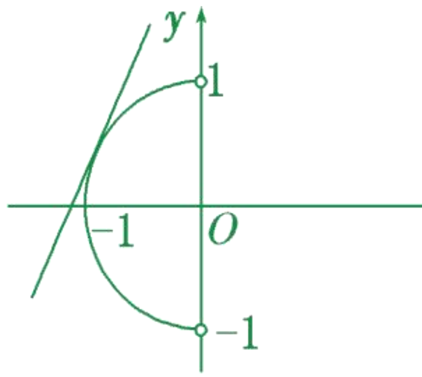
C．4　　　　D．$2\sqrt{2}$

转化要点：1 化简$f(x)$.

2 注意分式的几何意义.

解析：$f(x) = \frac{1+\cos 2x + 2(1-\cos 2x)}{\sin 2x} = \frac{3-\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{3-\cos 2x}{0-(-\sin 2x)}$，它表示点$(0,3)$与点$(-\sin 2x, \cos 2x)$连线的斜率，而点$(-\sin 2x, \cos 2x)$在$0 < x < \frac{\pi}{2}$时是圆$x^2+y^2=1$的左半圆(不含端点)，数形结合可知当过$(0,3)$的直线与该半圆相切时，斜率最小，即$f(x)$最小．设切线方程为$y = kx+3$，

则$\frac{|3|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Rightarrow k = 2\sqrt{2}$或$k = -2\sqrt{2}$（舍），故$f(x)$的最小值为$2\sqrt{2}$.



数形结合的思想方法应用广泛，运用数形结合思想，不仅直观, 易发现解题途径，而且能避免复杂的计算与推理，大大简化了解题过程. 这在解选择题、填空题中更显其优越，要注意培养这种思想意识，要争取胸中有图，见数想图，以开拓自己的思维视野.

【小结提升】

运用数形结合的思想分析解决问题时，应把握以下三个原则

(1)等价性原则

在数形结合时，代数性质和几何性质的转换必须是等价的，否则解题将会出现漏洞.

(2)双向性原则

在数形结合时，既要进行几何直观的分析，又要进行代数抽象的探索，两方面相辅相成，仅对代数问题进行几何分析(或仅对几何问题进行代数分析)在许多时候是很难行得通的.

(3)简单性原则

就是找到解题思路之后，至于用几何方法还是用代数方法或者兼用两种方法来叙述解题过程，则取决于哪种方法更为简单，而不是去刻意追求代数问题运用几何方法，几何问题运用代数方法.

【本专题学法指导】

1．善于观察图形，以揭示图形中蕴含的数量关系.

观察是人们认识客观事物的开始，直观是图形的基本特征，观察图形的形状、大小和相互位置关系，并在此基础上揭示图形中蕴含的数量关系，是认识、掌握数形结合的重要进程.

2．正确绘制图形，以反映图形中相应的数量关系.

观察图形，既要定性也要定量，借助图形来完成某些题时，仅画图示“意”是不够的，还必须反映出图形中的数量关系.

3．切实把握“数”与“形”的对应关系，以图识形, 以形识图.