

拓展提升任务答案:

1.解:

$$(1) \text{ 设 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g(x) = \cos x - \frac{1}{1+x}, \quad g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}.$$

当 $x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x)$ 单调递减, 而 $g'(0) > 0, g'(\frac{\pi}{2}) < 0$,

可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 有唯一零点, 设为 α .

则当 $x \in (-1, \alpha)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-1, \alpha)$ 单调递增, 在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 故 $g(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极

大值点, 即 $f'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

(i) 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递增, 而 $f'(0) = 0$, 所以
当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 又 $f(0) = 0$, 从而 $x = 0$ 是
 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 的唯一零点.

(ii) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 由 (1) 知, $f'(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 单调递增, 在 $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减,

而 $f'(0) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) < 0$, 所以存在 $\beta \in \left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(\beta) = 0$, 且当 $x \in (0, \beta)$ 时,

$f'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $(0, \beta)$ 单调递增, 在 $\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调
递减.

又 $f(0) = 0, f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) > 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) > 0$.

从而 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 没有零点.

(iii) 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减. 而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$,

$f(\pi) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 有唯一零点.

(iv) 当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\ln(x+1) > 1$, 所以 $f(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 没有零点.

综上, $f(x)$ 有且仅有2个零点.

2.解:

(I) 由题意 $f(\pi) = \pi^2 - 2$

$$\text{又 } f'(x) = 2x - 2\sin x,$$

$$\text{所以 } f'(\pi) = 2\pi,$$

因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程为

$$y - (\pi^2 - 2) = 2\pi(x - \pi),$$

$$\text{即 } y = 2\pi x - \pi^2 - 2.$$

(II) 由题意得 $h(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) - a(x^2 + 2\cos x)$,

因为 $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) + e^x(-\sin x - \cos x + 2) - a(2x - 2\sin x)$

$$= 2e^x(x - \sin x) - 2a(x - \sin x)$$

$$= 2(e^x - a)(x - \sin x),$$

$$\text{令 } m(x) = x - \sin x$$

$$\text{则 } m'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

所以 $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $m(0) = 0$,

所以 当 $x > 0$ 时, $m(x) > 0$,

当 $x < 0$ 时, $m(x) < 0$

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $e^x - a > 0$

当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

所以 当 $x = 0$ 时 $h(x)$ 取得极小值, 极小值是 $h(0) = -2a - 1$;

(2) 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = 2(e^x - e^{\ln a})(x - \sin x)$

由 $h'(x) = 0$ 得 $x_1 = \ln a$, $x_2 = 0$

① 当 $0 < a < 1$ 时, $\ln a < 0$,

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $e^x - e^{\ln a} < 0, h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\ln a, 0)$ 时, $e^x - e^{\ln a} > 0, h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x - e^{\ln a} > 0, h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

所以 当 $x = \ln a$ 时 $h(x)$ 取得极大值.

极大值为 $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$,

当 $x = 0$ 时 $h(x)$ 取到极小值, 极小值是 $h(0) = -2a - 1$;

② 当 $a = 1$ 时, $\ln a = 0$,

所以 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $h'(x) \geq 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 无极值;

③ 当 $a > 1$ 时, $\ln a > 0$

所以 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $e^x - e^{\ln a} < 0$, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $e^x - e^{\ln a} < 0$, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $e^x - e^{\ln a} > 0$, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增;

所以 当 $x = 0$ 时 $h(x)$ 取得极大值, 极大值是 $h(0) = -2a - 1$;

当 $x = \ln a$ 时 $h(x)$ 取得极小值.

极小值是 $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$.

综上所述:

当 $a \leq 0$ 时, $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

函数 $h(x)$ 有极小值, 极小值是 $h(0) = -2a - 1$;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(0, \ln a)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln a, 0)$ 上单调递减, 函数 $h(x)$ 有极大值, 也有极小值,

极大值是 $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$

极小值是 $h(0) = -2a - 1$;

当 $a = 1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 无极值;

当 $a > 1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \ln a)$ 上单调递减, 函数 $h(x)$ 有极大值, 也有极小值,

极大值是 $h(0) = -2a - 1$;

极小值是 $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$.