课题：含三角函数的导数问题

学习目标 ：

1.掌握含三角函数的导数问题中判断单调性的基本思路和方法

2.初步体会运用三角函数的有界性，单调性，周期性解决与三角函数有关综合题.

预备知识 ：

1.三角函数的概念及性质

2.导数研究函数单调性，极值，最值，不等式，恒成立和存在性问题，零点问题的基本思路和方法.

典型例题

例题 1: 已知函数 $f(x)=(x-a)\sin x+\cos x, x\in(0,\pi)$.

(Ⅰ)当 $a=\frac{\pi}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域;

(Ⅱ)当 $a>\frac{\pi}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间;

分析:

(Ⅰ)求函数的值域,首先解决函数的单调性,所以我们要掌握导数法研究单调性的基本思路.

求出 $f'(x)=(x-\frac{\pi}{2})\cos x$，类比于二次型，分别判断 $(x-\frac{\pi}{2})$ 和 $\cos x$ 的正负，进而确定 $f'(x)$ 的符号，从而得出单调性.

(Ⅱ) 求出导函数 $f'(x)=(x-a)\cos x$ 之后，导函数的零点为 $\frac{\pi}{2},a$，需要分 $\frac{\pi}{2}<a<\pi$，$a\geq\pi$ 两种情况进行讨论，在定义域内判断导函数的正负从而得出函数的单调区间.

解析:

(Ⅰ)当 $a=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)=(x-\frac{\pi}{2})\sin x+\cos x$

定义域为 $(0,\pi)$

$$f'(x)=\sin x+(x-\frac{\pi}{2})\cos x-\sin x=(x-\frac{\pi}{2})\cos x$$

令 $f'(x)=0$， $x=\frac{\pi}{2}$.

x	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$
$f'(x)$	−	0	−
$f(x)$	↘		↘

∴ $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减.

$\because f(0)=1, f(\pi)=-1$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$.

(2) $f'(x)=\sin x+(x-a)\cos x-\sin x=(x-a)\cos x$

①当 $\frac{\pi}{2}<a<\pi$ 时，

x	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},a)$	a	(a,π)
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调增区间为 $(\frac{\pi}{2},a)$，单调减区间为 $(0,\frac{\pi}{2})$，(a,π).

②当 $a\geq\pi$ 时，

x	$(0,\frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2},\pi)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调增区间为 $(\frac{\pi}{2},\pi)$，单调减区间为 $(0,\frac{\pi}{2})$.

小结：通过本题，我们可看出，对于函数单调性问题，无论是否含有三角函数，我们都需要掌握导数研究单调性的基本思路和方法，在此基础上结合三角函数的性质就能解决问题了.

例题 2　已知函数 $f(x)=x+\sin x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程;

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，若不等式 $f(x)\geq ax\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，求实数 a 的最大值.

分析：

（Ⅰ）直接求切线方程即可.

（Ⅱ）首先将恒成立问题转化为函数的最值问题，然后研究函数的最值就可以了. 到底转化成那个函数的最值，从而就需要构造恰当的函数. 我们有两个方案：第一，直接构造函数

$g(x)=x+\sin x-ax\cos x$，然后再研究这个函数的最小值；第二，先分离参数，将问题变成 $a\le\dfrac{x+\sin x}{x\cos x}$，我们构造函数 $g(x)=\dfrac{x+\sin x}{x\cos x}$，然后研究 $g(x)$ 的最小值.

解析：

（Ⅰ） $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+1$

$\because f'(x)=1+\cos x$

$\therefore f'(\frac{\pi}{2})=1$

$\therefore y-\frac{\pi}{2}-1=x-\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2},f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程 $y=x+1$

（Ⅱ）**解法一：**

令 $g(x)=f(x)-ax\cos x=x+\sin x-ax\cos x$

$g'(x)=1+\cos x-a\cos x+ax\sin x=1+(1-a)\cos x+ax\sin x$

当 $0<a\le 1$ 时：

$\because (1-a)\cos x\ge 0$， $ax\sin x\ge 0$，

$\therefore g'(x)>0$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立；

$\therefore g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增， $g(x)_{\min}=g(0)=0,$

$\therefore g(x)\ge 0$

当 $a>1$ 时：令 $h(x)=g'(x)=1+(1-a)\cos x+ax\sin x$，

$\therefore h'(x)=(2a-1)\sin x+ax\cos x$

$\because (2a-1)\sin x\ge 0$， $ax\cos x\ge 0$，

$\therefore h'(x)\ge 0$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立；

$\therefore h(x)$ 即 $g'(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增且 $g'(0)=2-a$， $g'(\frac{\pi}{2})=1+\frac{\pi}{2}a>0$

①若 $2-a\ge 0$，即： $a\le 2$

$\therefore g'(x)>0$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立

$\therefore$ 由 $0<a\le 1$ 情况可知 $g(x)\ge 0$.

②若 $2-a<0$，即： $a>2$

$\because g'(0)<0, g'(\frac{\pi}{2})>0$

$\therefore$ 存在唯一的 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使得 $g'(x_0)=0$.

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,\frac{\pi}{2})$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

$\because g(0)=0$ 且 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减

$\therefore g(x_0)<0$，所以不等式 $g(x)\ge 0$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上不能恒成立.

综上所述，当 $a\in(0,2]$ 时， $f(x)\ge ax\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立.

$\therefore a$ 的最大值为 2 .

解法二：

$x+\sin x\ge ax\cos x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

当 $x=0$ 时， $0\ge a\bullet 0$ 恒成立， $a\in(0,+\infty)$；

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $\frac{\pi}{2}+1\ge a\bullet 0$ 恒成立， $a\in(0,+\infty)$；

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时： $x\cos x>0$，则 $a\le\dfrac{x+\sin x}{x\cos x}$

令 $g(x)=\dfrac{x+\sin x}{x\cos x}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$g'(x)=\frac{(1+\cos x)x\cos x-(x+\sin x)(\cos x-x\sin x)}{(x\cos x)^2}=\frac{x-\sin x\cos x+x^2\sin x}{(x\cos x)^2}$$

令 $h(x)=x-\sin x\cos x+x^2\sin x$

令 $h'(x)=1-(\cos^2 x-\sin^2 x)+2x\sin x+x^2\cos x=2\sin^2 x+2x\sin x+x^2\cos x$

$\because 2\sin^2 x\ge 0, 2x\sin x\ge 0, x^2\cos x\ge 0$

$\therefore h'(x)\ge 0$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立

$\therefore h(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，且 $h(0)=0$

$\therefore h(x)\ge 0$，即： $g'(x)\ge 0$

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\because x\to 0$时，$g(x)\to 2$

$\therefore a\in(0,2]$

综上所述，当$a\in(0,2]$时，$f(x)\geq ax\cos x$在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上恒成立.

$\therefore a$的最大值为2.

注：关于上面的求极限的过程，我们通常有两种方法:

①洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos x-x\sin x}=2$$

也可以使用重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{\cos x}\right)=2\quad 或\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{x}\right)=2$$

②利用导数的定义：

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x+\sin x}{\cos x}-0}{x-0}=\left(\frac{x+\sin x}{\cos x}\right)'\Bigg|_{x=0}=2$$

小结提升：

在解决与三角函数有关的函数单调性时：

1. 在确定与三角函数有关的导函数的符号时，往往需要各部分进行仔细地分析，将能确定的固定下来，讨论不能确定的部分.

2. 利用三角函数$|\sin x|\leq 1,|\cos x|\leq 1$的有界性，可以确定进行分类讨论的依据，从而使问题变得清晰简单.

3. 与三角函数有关的导数问题，在导函数符号无法确定时，往往需要多次求导.

4. 合理的使用三角不等式进行放缩，能够使得问题变得简单.

5. 在使用分离参数时，通常涉及到要求某个点处的极限，如果能够结合导数的定义和洛必达法则，能够使得解答过程变得简单.

课后作业：（见文件 3）

拓展提升任务：（见文件 4）