

函数的极值

拓展提升任务答案

1. 已知函数 $f(x) = (2+x+ax^2)\ln(1+x) - 2x$ ，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 。

1. 解析：(i) 若 $a \geq 0$ ，由 (1) 知，当 $x > 0$ 时， $f(x) \geq (2+x)\ln(1+x) - 2x > 0 = f(0)$ ，

这与 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾。

(ii) 若 $a < 0$ ，设函数 $h(x) = \frac{f(x)}{2+x+ax^2} = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x+ax^2}$ 。

由于当 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时， $2+x+ax^2 > 0$ ，故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同。

又 $h(0) = f(0) = 0$ ，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点当且仅当 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点。

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(2+x+ax^2) - 2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2} = \frac{x^2(a^2x^2 + 4ax + 6a + 1)}{(x+1)(ax^2 + x + 2)^2}.$$

如果 $6a+1 > 0$ ，则当 $0 < x < -\frac{6a+1}{4a}$ ，且 $|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时， $h'(x) > 0$ ，故 $x=0$ 不是

$h(x)$ 的极大值点。

如果 $6a+1 < 0$ ，则 $a^2x^2 + 4ax + 6a + 1 = 0$ 存在根 $x_1 < 0$ ，故当 $x \in (x_1, 0)$ ，且

$|x| < \min\{1, \sqrt{\frac{1}{|a|}}\}$ 时， $h'(x) < 0$ ，所以 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点。

如果 $6a+1 = 0$ ，则 $h'(x) = \frac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$ 。

则当 $x \in (-1, 0)$ 时， $h'(x) > 0$ ；

当 $x \in (0, 1)$ 时， $h'(x) < 0$ 。

所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

综上， $a = -\frac{1}{6}$ 。

2. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$, $g(x) = xf(x) + \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $a=1$ 时, 若函数 $g(x)$ 在区间 $(m, m+1) (m \in \mathbf{Z})$ 内存在唯一的极值点, 求 m 的值.

2. 解: (I) 由已知得 $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$.

(i) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数;

(ii) 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{a}$;

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$4 分

(II) 因为 $g(x) = xf(x) + \frac{1}{2}x^2 + 2x = x(\ln x - x - 1) + \frac{1}{2}x^2 + 2x = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x$,

则 $g'(x) = \ln x + 1 - x + 1 = \ln x - x + 2 = f(x) + 3$.

由 (I) 可知, 函数 $g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

又因为 $g'(\frac{1}{e^2}) = -2 - \frac{1}{e^2} + 2 = -\frac{1}{e^2} < 0$, $g'(1) = 1 > 0$,

所以 $g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有且只有一个零点 x_1 .

又在 $(0, x_1)$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减;

在 $(x_1, 1)$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(x_1, 1)$ 上单调递增.

所以 x_1 为极值点, 此时 $m = 0$.

又 $g'(3) = \ln 3 - 1 > 0$, $g'(4) = 2 \ln 2 - 2 < 0$,

所以 $g'(x)$ 在 $(3, 4)$ 上有且只有一个零点 x_2 .

又在 $(3, x_2)$ 上 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(3, x_2)$ 上单调递增;

在 $(x_2, 4)$ 上 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(x_2, 4)$ 上单调递减.

所以 x_2 为极值点, 此时 $m = 3$.

综上所述, $m = 0$ 或 $m = 3$.

方法小结 (1)求 $f'(x)$, 分 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况讨论; (2)把函数 $g(x)$ 在 $(m, m+1) (m \in \mathbf{Z})$ 内存在

唯一的极值点转化为函数 $g(x)$ 的导数在 $(m, m+1)$ 内有唯一的零点.

3. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 a 的值, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 已知函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3}$, 若 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点, 求 a 的取值范围;

(III) 设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 试讨论过两点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ 的直线能否过点 $(1,1)$, 若能, 求 a 的值; 若不能, 说明理由.

解析: (I) 由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax$ 求得 $f'(x) = x^2 - x + a$

$\therefore f'(2) = 4 - 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$, 代入 $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = 2, x_2 = -1$

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1), (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

(II) 由 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}x^3 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a)x^2 + ax + \frac{2}{3}$

求得 $g'(x) = x^2 - (1+a)x + a = (x-1)(x-a)$

$\therefore$ 当 $a \geq 1$ 时, 当 $x \in (0,1)$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, $g(x)$ 单调递增, 又 $g(0) = \frac{2}{3} > 0$

此时 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内没有零点;

当 $0 < a < 1$ 时, 当 $x \in (0, a)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (a, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减. 又 $g(0) = \frac{2}{3} > 0$

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点, 必有 $g(1) < 0$.

$g(1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a) + a + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow a < -1$ 无解

当 $a \leq 0$ 时, 当 $x \in (0,1)$ 时, $g'(x) < 0$ 恒成立, $g(x)$ 单调递减

此时欲使 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点, 必有 $g(1) < 0 \Rightarrow a < -1$.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, -1)$.

(III) 不能. 原因如下:

设 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 则导函数 $f'(x) = x^2 - x + a$ 有两个不同的零点

$\therefore \Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{4}$, 且 x_1, x_2 为方程 $x^2 - x + a = 0$ 的两根

$x_1^2 - x_1 + a = 0 \Rightarrow x_1^2 = x_1 - a$

$$\therefore f(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2 + ax_1 = \frac{1}{3}x_1(x_1 - a) - \frac{1}{2}x_1^2 + ax_1 = -\frac{1}{6}x_1^2 + \frac{2}{3}ax_1 = -\frac{1}{6}(x_1 - a) + \frac{2}{3}ax_1$$

$$\therefore f(x_1) = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right)x_1 + \frac{1}{6}a \quad \text{同理 } f(x_2) = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right)x_2 + \frac{1}{6}a$$

由此可知过两点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ 的直线方程为 $y = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right)x + \frac{1}{6}a$

$$\text{若直线过点 (1,1), 则 } 1 = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6}a \Rightarrow \frac{5}{6}a = \frac{7}{6} \Rightarrow a = \frac{7}{5}$$

前面已经讨论过若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 $a < \frac{1}{4}$, 显然不合题意.

综上, 过两点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ 的直线不能过点 (1,1).

方法点拨 函数的极值点问题可以转化为导函数的零点问题或对应方程的根的问题进行研究.