

函数的极值

作业详解

1. 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x-2} + \ln x$, 其中 $a \in R$.

(1) 给出 a 的一个取值, 使得曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线, 并说明理由;

(2) 若 $f(x)$ 存在极小值和极大值, 证明: $f(x)$ 的极小值大于极大值.

1. 思路分析 (1) 可转化为方程 $f'(x) = 0$ 在定义域内有解.

(2) 分 $a \leq 0$ 和 $a > 0$ 两种情况讨论, 易得 $a \leq 0$ 不符合题意, 重点分析 $a > 0$ 时的导数符号即函数单调性, 进而得到极小值和极大值的情况, 作差证明即可.

解后反思 第(1)问答案不唯一. 只要 $a > 0$ 均符合要求.

解析 (1) 当 $a = 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线.

理由如下: 函数 $f(x)$ 的定义域是 $D = \{x | x > 0, \text{ 且 } x \neq 2\}$,

$$f'(x) = -\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{1}{x}.$$

曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线 $\Leftrightarrow$ 方程 $f'(x) = 0$ 存在 D 上的解.

令 $-\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = 0$, 整理得 $x^2 - 5x + 4 = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 4$.

所以当 $a = 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 0 的切线.

(2) 证明: 由(1)得, $f'(x) = -\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{1}{x}$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 无极值, 不符合题意.

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 整理得 $x^2 - (a+4)x + 4 = 0$ (*).

$a > 0$ 时, $\Delta = [-(a+4)]^2 - 16 > 0$ 恒成立,

所以方程(*)必有两个不相等的实数根, 设为 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$.

由 $\begin{cases} x_1 + x_2 = a + 4 > 4, \\ x_1 x_2 = 4, \end{cases}$ 得 $0 < x_1 < 2 < x_2$.

$f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, x_1)$	x_1	$(x_1, 2)$	$(2, x_2)$	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$
--------	------------	-----	------------	------------	-----	------------

所以, $f(x)$ 存在极大值 $f(x_1)$, 极小值 $f(x_2)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{a}{x_2-2} + \ln x_2 \right) - \left(\frac{a}{x_1-2} + \ln x_1 \right) = \left(\frac{a}{x_2-2} - \frac{a}{x_1-2} \right) + (\ln x_2 - \ln x_1).$$

因为 $0 < x_1 < 2 < x_2$, 且 $a > 0$, 所以 $\frac{a}{x_2-2} - \frac{a}{x_1-2} > 0$, $\ln x_2 - \ln x_1 > 0$,

所以 $f(x_2) > f(x_1)$.

所以 $f(x)$ 的极小值大于极大值.

2. 已知函数 $f(x) = e^x - a \ln x - a$.

(I) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 证明: 对于 $\forall a \in (0, e)$, $f(x)$ 在区间 $(\frac{a}{e}, 1)$ 上有极小值, 且极小值大于 0.

解: (I) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

因为 $a = e$, 所以 $f(x) = e^x - e(\ln x + 1)$, 所以 $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$.

因为 $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 0$.

(II) 因为 $0 < a < e$, 所以 $f'(x) = e^x - \frac{a}{x}$ 在区间 $(\frac{a}{e}, 1)$ 上是单调递增函数.

因为 $f'(\frac{a}{e}) = e^{\frac{a}{e}} - e < 0$, $f'(1) = e - a > 0$,

所以 $\exists x_0 \in (\frac{a}{e}, 1)$, 使得 $e^{x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$.

所以 $\forall x \in (\frac{a}{e}, x_0)$, $f'(x) < 0$; $\forall x \in (x_0, 1)$, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{e}, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(x_0)$.

因为 $e^{x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$,

所以 $f(x_0) = e^{x_0} - a(\ln x_0 + 1) = a(\frac{1}{x_0} - \ln x_0 - 1)$.

设 $g(x) = a(\frac{1}{x} - \ln x - 1)$, $x \in (\frac{a}{e}, 1)$,

则 $g'(x) = a(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}) = -\frac{a(1+x)}{x^2}$,

所以 $g'(x) < 0$,

即 $g(x)$ 在 $(\frac{a}{e}, 1)$ 上单调递减, 所以 $g(x) > g(1) = 0$,

即 $f(x_0) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的极小值大于 0.