函数的极值

学习任务单

学习目标:

- ①了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求函数的极大值、极小值（对多项式函数一般不超过三次）。
- ②熟练掌握利用导数研究函数的单调性、极值的基本方法，灵活运用数形结合思想、分类讨论思想、函数方程思想等分析问题解决问题。

基础知识与方法网络构建

一) 函数的单调性:

1. 设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导,

如果 $f'(x) > 0$, 则函数 $y=f(x)$ 单调递_____;

如果 $f'(x) < 0$, 则函数 $y=f(x)$ 单调递_____;

2. 讨论可导函数的单调性的步骤:

- (1) 确定 $f(x)$ 的_____;
- (2) 求 $f'(x)$, 令 $f'(x) = 0$, 解方程求分界点;
- (3) 用分界点将定义域分成若干个开区间;
- (4) 判断 $f'(x)$ 在每个开区间内的符号, 即可确定 $f(x)$ 在相应区间上的_____.

二) 函数的极值

1. 函数的极小值:

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其它点的函数值都_____,

则点 a 叫做函数 $y=f(x)$ 的_____点, _____叫做函数 $y=f(x)$ 的极小值.

2. 函数的极大值:

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近的其他点的函数值都_____,

则点 b 叫做函数 $y=f(x)$ 的_____点, _____叫做函数 $y=f(x)$ 的极大值.

极小值点, 极大值点统称为极值点, 极大值和极小值统称为极值.

3. 判断 $f(x_0)$ 是极值的方法

一般地, 当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时,

- ② 如果在 x_0 附近的左侧_____, 右侧_____, 那么 $f(x_0)$ 是极大值;

②如果在 x_0 附近的左侧_____，右侧_____，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

4. 求可导函数极值的步骤

①求 $f'(x)$;

②求方程_____的根;

③检查 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根附近的左右两侧导数值的符号. 如果左正右负, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值; 如果左负右正, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值.

答案:

一) 1. 增, 减; 2. 定义域, 单调性;

二) 1. 小, 极小值, $f(a)$; 2. 大, 极大值, $f(b)$; 3. $f'(x)>0, f'(x)<0; f'(x)<0, f'(x)>0$; 4. $f'(x)=0$

热身练习

求函数 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$ 的极值

解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x)=2x-2-\frac{4}{x}=\frac{2(x-2)(x+1)}{x}$$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$ 或 $x=-1$ (舍)

随着 x 的变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(2) = -4\ln 2$, 无极大值.

典例精讲

1、已知函数 $f(x) = x - a \ln x (a \in R)$, 求函数 $f(x)$ 的极值.

解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 由 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}, x > 0$ 可知:

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 函数 $f(x)$ 无极值;

②当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$;

$\because x \in (0, a)$ 时, $f'(x) < 0$, $x \in (a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极小值, 且极小值为 $f(a) = a - a \ln a$, 无极大值.

综上: 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极小值 $a - a \ln a$, 无极大值.

2、设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a + 1)x + 4a + 3]e^x$. 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

解 1: 得 $f'(x) = [ax^2 - (2a+1)x + 2]e^x = (ax-1)(x-2)e^x$.

当 $a=0$ 时, $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $x \in \left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值.

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $x \in \left(2, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

当 $a < 0$ 时, $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上, $a > \frac{1}{2}$

解 2: $f'(x) = [ax^2 - (2a+1)x + 2]e^x = (ax-1)(x-2)e^x$.

当 $a=0$ 时, $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

当 $a > 0$ 时, $\because f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值, $\therefore$ 应满足 $\frac{1}{a} < 2$, 解得 $a > \frac{1}{2}$

此时, $x \in \left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $x=2$ 时取得极小值.

当 $a < 0$ 时, $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上, $a > \frac{1}{2}$

解 3: 因为 $f'(x) = [ax^2 - (2a+1)x + 2]e^x = (ax-1)(x-2)e^x$.

若 $a > \frac{1}{2}$, 则当 $x \in \left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x) < 0$ 在 $x=2$ 处取得极小值.

若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $x-2 < 0$, $ax-1 \leq \frac{1}{2}x-1 < 0$,

所以 $f'(x) > 0$.

所以 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述, a 的取值范围是 $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

方法小结

三个思路都是基于 $f'(x) = [ax^2 - (2a+1)x + 2]e^x = (ax-1)(x-2)e^x$ 的性质来解析的, 对二次函数图象与性质理解的角度不同, 就会有不同的解析. 按照题意只需考查 $x = 2$ 及其附近函数的性质即可.

如果没有充分利用因式分解的特征, 解析会较复杂.

课堂小结

函数极值是函数性质之一, 研究函数性质首先要考查定义域, 在定义域范围内讨论; 函数单调性变化会产生极值, 因此对于可导函数, 导数值正负变化处会有极值, 且此时导数值为零.

作业 (见作业任务单)

拓展提升 (见拓展提升任务单)