

《导数中的切线问题》拓展提升参考答案

1. 4

【解析】

【分析】

利用切点和斜率列方程组，化简求得 a, b 的关系式，进而利用基本不等式求得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

【详解】

依题意令 $y' = \frac{1}{x+b} = 1$ ，解得 $x_0 = 1-b$ ，所以 $\begin{cases} y_0 = x_0 - a = 1-b-a \\ y_0 = \ln(x_0 + b) = \ln 1 = 0 \end{cases}$ ，所以 $1-b-a=0$ ，

所以 $a+b=1$ ，所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 4$ ，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$

时等号成立，所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为4.

故答案为：4

2.

【解析】

试题分析：(1) 设切点，由相切得出切线方程，然后列表并讨论求出结果；(3) 由(2) 容易得出结果.

(1) 设过点 $P(1, t)$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 (x_0, y_0) ，则

$y_0 = 2x_0^3 - 3x_0$ ，且切线斜率为 $k = 6x_0^2 - 3$ ，所以切线方程为 $y - y_0 = (6x_0^2 - 3)(x - x_0)$ ，

因此 $t - y_0 = (6x_0^2 - 3)(1 - x_0)$ ，整理得： $4x_0^3 - 6x_0^2 + t + 3 = 0$ ，

设 $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + t + 3$ ，则“过点 $P(1, t)$ 存在3条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切”等价于“ $g(x)$ 有3

个不同零点”， $g'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$ ，

$g(x)$ 与 $g'(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		$t+3$		$t+1$	

所以, $-3 < t < -1$ 是 $g(x)$ 的极大值, $-3 < t < -1$ 是 $g(x)$ 的极小值,

当 $g(0) = t+3 \leq 0$, 即 $t \geq -1$ 时, 此时 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上分别至多有 1 个零点, 所以 $g(x)$ 至多有 2 个零点,

当 $g(1) = t+1 \geq 0$, $P(1, t)$ 时, 此时 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(-\infty, 0)$ 上分别至多有 1 个零点, 所以 $g(x)$ 至多有 2 个零点.

当 $g(0) > 0$ 且 $(-3, -1)$, 即 $-3 < t < -1$ 时, 因为 $g(-1) = t-7 < 0$, $g(2) = t+11 > 0$,

所以 $g(x)$ 分别为区间 $[-1, 0]$, $[0, 1]$ 和 $g(x)$ 上恰有 1 个零点, 由于 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调, 所以 $g(x)$ 分别在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $[1, +\infty)$ 上恰有 1 个零点.

综上所述, 当过点 $P(1, t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切时, t 的取值范围是 $(-3, -1)$.

(3) 过点 A $(-1, 2)$ 存在 3 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切;

过点 B $(2, 10)$ 存在 2 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切;

过点 C $(0, 2)$ 存在 1 条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切.

考点: 本小题主要考查导数的几何意义、导数在函数中的应用等基础知识的同时, 考查分类讨论、函数与方程、转化与化归等数学思想, 考查同学们分析问题与解决问题的能力. 利用导数研究函数问题是高考的热点, 在每年的高考试卷中占分比重较大, 熟练这部分的基础知识、基本题型与基本技能是解决这类问题的关键.

