《导数中的切线问题》课时测验参考答案

一、选择题

1．B

【解析】

试题分析：$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$，令 $f'(x)=1$，则倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$.

故选：B.

2．A

【解析】

【分析】

先利用函数为奇函数求出$a=2$，再求出函数的导数后可得切线的斜率，从而得到所求的切线方程.

【详解】

函数 $f(x)=x^3+(a-2)x^2+2x$，

因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(-x)=-x^3+(a-2)x^2-2x=-f\left(x\right)=-x^3-(a-2)x^2-2x$，

故$\left(a-2\right)x^2=0$，所以$a=2$，

所以函数 $f(x)=x^3+2x$，可得 $f^{'}(x)=3x^2+2$，而 $f(1)=3$， $f'(1)=5$

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为： $y-3=5(x-1)$ 即 $y=5x-2$.

故选：A.

3．A

【解析】

【分析】

设切点坐标$\left(m,2m+\ln m\right)$，利用两点连线斜率公式和切点处的导数值表示出切线斜率，从而构造方程求得结果.

【详解】

由题意得： $f'\left(x\right)=2+\dfrac{1}{x}$，直线$l_1$恒过$\left(0,-1\right)$

设直线l_1与$f\left(x\right)$相切于点$\left(m,2m+\ln m\right)$

则$k=f'\left(m\right)$，即$\dfrac{2m+\ln m+1}{m}=2+\dfrac{1}{m}$　　$\therefore \ln m=0$，解得：$m=1$

$\therefore k=2+1=3$

故选：A

4．B

【解析】

【分析】

对函数求导，求出函数切线方程，由题意可以转化为方程与两个不相等的正根，通过构造函数，利用新构造函数的导数，判断单调性最后求出a的取值范围.

【详解】

由题意得，$f'\left(x\right)=\ln x+1+a\left(x>0\right)$，设切点为$\left(x_0,x_0\ln x_0+ax_0\right)$，切线斜率为

$f'\left(x_0\right)=\ln x_0+1+a$，切线方程为：$y-\left(x_0\ln x_0+ax_0\right)=\left(\ln x_0+1+a\right)\left(x-x_0\right)$

$\Rightarrow y=\left(\ln x_0+1+a\right)x-x_0$，因为切线过$P$点，所以$1=\ln x_0+1+a-x_0$，即$a=x_0-\ln x_0\left(*\right)$.

由于过点$P\left(1,1\right)$可作两条直线与$f\left(x\right)$的图象相切，所以方程$\left(*\right)$有两个不相等的正根，令

$g\left(x\right)=x-\ln x$，$g'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，所以$g\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单减，$\left(1,+\infty\right)$上单增，且$g\left(1\right)=1$，

因为$x\to 0^+$时，$g\left(x\right)\to+\infty$，$x\to+\infty$时，$g\left(x\right)\to+\infty$，结合$g\left(x\right)$的图象，可知$a>1$时满足题意.

故选：B

二、填空题

5．$x-y+2=0$

【解析】

【分析】

利用导数求得切线的斜率，结合切点坐标求得切线方程.

【详解】

依题意 $f^{'}(x)=\sin x+x\cos x$， $f^{'}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，切点坐标为$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2\right)$，由点斜式得

$y-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)=x-\frac{\pi}{2}$，即 $x-y+2=0$.

故答案为： $x-y+2=0$

6．1 或$\frac{1}{e}$

【解析】

【分析】

分别设出直线与两曲线的切点坐标，求出导数值，得到两切线方程，由两切线重合得斜率和截距相等，从而求得切线方程的答案。

【详解】

设 $y=kx+b$ 与 $y=\ln x$ 和 $y=e^{x-2}$ 的切点分别为$(x_1,e^{x_1-2}),(x_2,\ln x_2)$，由导数的几何意义可得

$k=e^{x_1-2}=\frac{1}{x_2}$，曲线在 $y=e^{x-2}$ 在点(x_1,e^{x_1-2})处的切线方程为$y-e^{x_1-2}=e^{x_1-2}(x-x_1)$，即

$y=e^{x_1-2}x+(1-x_1)e^{x_1-2}$，曲线 $y=\ln x$ 在点$(x_2,\ln x_2)$处的切线方程为$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即

$y=\frac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$ ，则$\begin{cases}e^{x_1-2}=\frac{1}{x_2}\\(1-x_1)e^{x_1-2}=\ln x_2-1\end{cases}$，解得 $x_2=1$，或 $x_2=e$，所以 $k=1$ 或 $\frac{1}{e}$ 。

7． $3x-3y+1=0$

【解析】

【分析】

对函数进行求导，令 $x=1$ 求得 $f^{'}(1)$，从而得到函数解析式，进一步求得 $f(1)$，再由直线的点斜式方程并化简得到直线的一般方程.

【详解】

$\because$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}f^{'}(1)x^2+x+\frac{1}{2}$，

$\therefore f'(x)=x^2-f'(1)\ x+1$，则 $f'(1)=1-f'(1)\ +1$，即 $f'(1)=1$.

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$，则 $f(1)=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y-\frac{4}{3}=1\times(x-1)$，

即 $3x-3y+1=0$.

故答案为：$3x-3y+1=0$.

8．1

【解析】

试题分析：

$$f'(x)=3ax^2+1\Rightarrow f'(1)=3a+1, f(1)=a+2\Rightarrow l:y-(a+2)=(3a+1)(x-1)\Rightarrow 7-(a+2)$$

$$=(3a+1)(2-1)\Rightarrow a=1.$$

考点：1、导数的几何意义；2、直线方程.

【方法点睛】本题考查导数的几何意义、直线方程，涉及分特殊与一般思想、数形结合思想和转化化归思想，考查逻辑思维能力、等价转化能力、运算求解能力，综合性较强，属于较难题型．首先求导可得

$$f'(x)=3ax^2+1\Rightarrow f'(1)=3a+1, f(1)=a+2\Rightarrow l:y-(a+2)=(3a+1)(x-1)\Rightarrow 7-(a+2)$$

$$=(3a+1)\bullet(2-1)\Rightarrow a=1.$$

三、解答题

9．存在，$\left(-3,\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$.

【解析】

【分析】

假设存在符合条件的点 $P\left(a,a^2\right)$，同时设切点为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0\right)$，由导数几何意义得

$\frac{a^2-\left(x_0^3-3x_0\right)}{a-x_0}=3x_0^2-3$ 即 $2x_0^3-3ax_0^2+a^2+3a=0$（*），问题转化为关于 x_0 的方程（*）存在

三个不同实根．然后用导数研究函数 $g(x)=2x^3-3ax^2+a^2+3a$ 的零点．

【详解】

假设存在符合条件的点 $P(a,a^2)$，切点设为 $(x_0,x_0^3-3x_0)$

所以 $\dfrac{a^2-(x_0^3-3x_0)}{a-x_0}=3x_0^2-3$ 即 $2x_0^3-3ax_0^2+a^2+3a=0$（*）

故问题转化为关于 x_0 的方程（*）存在三个不同实根．

令 $g(x)=2x^3-3ax^2+a^2+3a$，则 $g'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

当 $a=0$ 时，$g'(x)=6x^2\geq 0$，$g(x)$ 在 R 上单调递增，不合题意；

当 $a>0$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增

从而 $\begin{cases}g(0)>0\\g(a)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a^2+3a>0\\-a^3+a^2+3a<0\end{cases}$

解得：$a>\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

当 $a<0$ 时，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 单调递增，在 $(a,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增

从而 $\begin{cases}g(a)>0\\g(0)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-a^3+a^2+3a>0\\a^2+3a<0\end{cases}$

解得：$-3<a<\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

综上，存在符合条件的点 P，其横坐标的取值范围为 $\left(-3,\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$．