课题：导数中的切线问题——学习任务单

【学习目标】

1. 学生能够熟练掌握利用导数求解切线方程的基本方法与流程；

2. 在解决导数中切线问题时，学生可以合理恰当进行转化，达到解决问题；

3. 学生在学习的过程中充分体会分析问题与合理转化对解题的重要性.

【学法指导】

教师在解决问题的过程中，把如何分析问题、如何进行合理转化以及题后反思作为整堂课的教学重点，给学生以示范，进而引导学生解题方法的形成.

【任务一】已知函数 $f(x)=\ln x+2$

（1）求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求过点 $(0,0)$ 函数 $f(x)$ 的切线方程.

解：（1）切线方程的切点为 $(1,\ f(1))$，即切点为 $(1,2)$

$f'(x)=\frac{1}{x}$，则斜率 $k=1$

则切线方程为：$y-2=x-1$，即：$x-y+1=0$

（2）由题意可知点 $(0,0)$ 不是切点，故设切点为 (x_0,y_0)，即切点为 $(x_0,\ln x_0+2)$

$f'(x)=\frac{1}{x}$，则斜率 $k=\frac{1}{x_0}$

则切线方程为：$y-(\ln x_0+2)=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$

因为切线过 $(0,0)$，所以可得 $0-(\ln x_0+2)=\frac{1}{x_0}(0-x_0)$，解得 $x_0=\frac{1}{e}$

所以切线方程为：$y=ex$

【任务二】利用导数求函数 $y=f(x)$ 切线方程的基本流程是什么？

（1）找到切点，当题目中没有给出切点时，设函数的切点 (x_0,y_0)，并把切点转化成 $(x_0,f(x_0))$；

（2）求导 $f'(x)$，求出切线的斜率 $k=f'(x_0)$；

（3）写出切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

【任务三】已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3ax\,(a\in\mathbf{R})$．在直线 $x=1$ 上是否存在点 P，使得过点 P 至少有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，说明理由.

解：假设存在在直线 $x=1$ 上点 $P(1,\ t)$ 使得过点 P 至少有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，

设切线切点为 (x_0,y_0)，即切点为 $\left(x_0,\frac{1}{3}x_0{}^3-x_0{}^2-3ax_0\right)$，

导数 $f'(x)=x^2-2x-3a$,则斜率 $k=f'(x_0)=x_0{}^2-2x_0-3a$ ，

则切线 l 方程为 $y-\frac{1}{3}x_0{}^3+x_0{}^2+3ax_0=(x_0{}^2-2x_0-3a)(x-x_0)$

因为点 P$(1,\ t)$ 在切线上，所以：$t-\frac{1}{3}x_0{}^3+x_0{}^2+3ax_0=(x_0{}^2-2x_0-3a)(1-x_0)$

整理得到切线 l 方程为：$\frac{2}{3}x_0{}^3-2x_0{}^2+2x_0+3a+t=0$

令 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x+3a+t$

$g'(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2\geq 0$

所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)=0$ 至多有一个解.

过点 P 与 $y=f(x)$ 相切的直线至多有一条.

故在直线 $x=1$ 上不存在点 P，使得过 P 至少有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切.

【任务四】完成【任务三】后的体会与收获？

切线的条数 $\Leftrightarrow$ 切点的个数 $\Leftrightarrow$ 方程根的个数 $\Leftrightarrow$ 函数图像与 x 轴交点的个数

【任务五】本节课的体会与收获？

1.利用导数求函数 $y=f(x)$ 切线方程的基本流程：

（1）找到切点，当题目中没有给出切点时，设函数的切点 (x_0,y_0)，并把切点转化成 $(x_0,f(x_0))$；

（2）求导 $f'(x)$，求出切线的斜率 $k=f'(x_0)$；

（3）写出切线方程：$y-f\left(x_0\right)=f^{'}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

2.在解题过程中注重知识的合理转化：函数 $y=f\left(x\right)$ 零点的个数 $\Leftrightarrow$ 方程 $f\left(x\right)=0$ 根个数 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f\left(x\right)$ 图像与 x 轴交点的个数