

【扩展提升任务答案】

1. 解: $f'(x) = (x+1)(e^x - m)$.

当 $m > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或 $x = \ln m$.

(i) 若 $m = \frac{1}{e}$, 则 $f'(x) = (x+1)(e^x - \frac{1}{e}) \geq 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

(ii) 若 $m > \frac{1}{e}$, 则 $\ln m > -1$. 故当 $f'(x) > 0$ 时, $x < -1$ 或 $x > \ln m$;

当 $f'(x) < 0$ 时, $-1 < x < \ln m$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(\ln m, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-1, \ln m)$ 单调递减.

(iii) 若 $0 < m < \frac{1}{e}$, 则 $\ln m < -1$. 故当 $f'(x) > 0$ 时, $x < \ln m$ 或 $x > -1$;

当 $f'(x) < 0$ 时, $\ln m < x < -1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln m)$, $(-1, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\ln m, -1)$ 单调递减.

(1) 当 $m = 0$ 时, $f(x) = xe^x$, 令 $f(x) = 0$, 得 $x = 0$. 因为当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 所以此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点.

(2) 当 $m > 0$ 时:

(i) 当 $m = \frac{1}{e}$ 时, 由 (II) 可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -\frac{1}{e} < 0$,

$f(1) = e - \frac{2}{e} > 0$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点.

(ii) 当 $m > \frac{1}{e}$ 时, 由 (II) 的单调性结合 $f(-1) < 0$, 又 $f(\ln m) < f(-1) < 0$,

只需讨论 $f(1) = e - 2m$ 的符号:

当 $\frac{1}{e} < m < \frac{e}{2}$ 时, $f(1) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点;

当 $m \geq \frac{e}{2}$ 时, $f(1) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上无零点.

(iii) 当 $0 < m < \frac{1}{e}$ 时, 由 (II) 的单调性结合 $f(-1) < 0$, $f(1) = e - 2m > 0$,

$f(\ln m) = -\frac{m}{2} \ln^2 m - \frac{m}{2} < 0$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有且只有一个零点.

综上所述, $0 \leq m < \frac{e}{2}$.

2. 解: 因为 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - (m+1)x - \ln x$,

所以 $g'(x) = x - \frac{1}{x^2} - (m+1) - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - (m+1)x^2 - x - 1}{x^2}$.

令 $h(x) = x^3 - (m+1)x^2 - x - 1$, $h'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - 1$.

若函数 $g(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有且只有一个极值点,

则函数 $h(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内存在零点.

又 $h'(0) = -1 < 0$,

所以 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一零点 x_0 .

且 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$;

$x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

则 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内为减函数, 在 $(x_0, +\infty)$ 内为增函数.

又因为 $h(0) = -1 < 0$, 且 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在零点,

所以 $\begin{cases} h(1) < 0, \\ h(2) > 0. \end{cases}$

解得 $-2 < m < \frac{1}{4}$.

显然 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有唯一零点, 记为 x_1 .

当 $x \in (1, x_1)$ 时, $h(x) < 0$, $x \in (x_1, 2)$ 时, $h(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 x_1 点两侧异号, 即 $g'(x)$

在 x_1 点两侧异号, x_1 为函数 $g(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内唯一极值点.

当 $m \leq -2$ 时, $h(1) = -m - 2 \geq 0$,

又 $h'(1) > 0, h'(x) > 0$ 在 $(1, 2)$ 内成立,

所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 内单调递增, 故 $g(x)$ 无极值点.

当 $m \geq \frac{1}{4}$ 时, $h(2) \leq 0, h(0) < 0$, 易得 $x \in (1, 2)$ 时, $h(x) < 0$, 故 $g(x)$ 无极值点.

所以当且仅当 $-2 < m < \frac{1}{4}$ 时, 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内有且只有一个极值点.