【课时作业答案】

1. 解：当$-\frac{1}{2}\le a<0$时，令$f'(x)=(x+1)(e^x+2a)=0$得$x=-1$或$x=\ln(-2a)$.

①当$\ln(-2a)<-1$，即$a\in(-\frac{1}{2e},0)$时，

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数$f(x)$在$(\ln(-2a),-1)$上单调递减，在$(-\infty,\ln(-2a))$和$(-1,+\infty)$上单调递增.

又因为$f(\ln(-2a))=a\ln^2(-2a)<0$，　$f(0)=0$，

所以函数$f(x)$有一个零点.

②当$\ln(-2a)=-1$，即$a=-\frac{1}{2e}$时，

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(-1)=-a-\frac{1}{e}$	↗

所以函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

又因为$f(0)=0$，所以函数$f(x)$有一个零点.

③当$-1<\ln(-2a)<0$，即$a\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2e})$时，

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,\ln(-2a))$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(-2)=-2e^{-2}+4a-4a=-2e^{-2}<0$， $f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}$，

$f(\ln(-2a))=a\ln^2(-2a)<0$， $f(0)=0$，

所以当 $a\in(-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{2e})$ 时，此时 $f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}<0$，函数 $f(x)$ 有一个零点；

当 $a=-\dfrac{1}{e}$ 时，此时 $f(-1)=0$，函数 $f(x)$ 有两个零点；

当 $a\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{e})$ 时，此时 $f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}>0$，函数 $f(x)$ 有三个零点.

④当 $\ln(-2a)=0$，即 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，显然函数 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述，（1）当 $a\in(-\dfrac{1}{e},0)$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点；

（2）当 $a\in\{-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{2}\}$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；

（3）当 $a\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{e})$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点.

另外的解法提示： $f(x)=x(e^x+ax+2a)$，易知 $f(0)=0$.即可考虑 $g(x)=e^x+ax+2a$ 的零点.

2. 解： $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

（i）当 $x\in(-1,0]$ 时，由（1）知， $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$ ，所以当 $x\in(-1,0)$ 时， $f'(x)<0$ ，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，又 $f(0)=0$ ，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

（ii）当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，由（1）知， $f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, 所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(\beta)=0$, 且当 $x\in(0,\beta)$ 时， $f'(x)>0$ ；当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 时， $f'(x)<0$.故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

又 $f(0)=0$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$ ，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时， $f(x)>0$.从而， $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 没有零点.

（iii）当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时， $f'(x)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ ， $f(\pi)<0$ ，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 有唯一零点.

（iv）当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时， $\ln(x+1)>1$ ，所以 $f(x)$ <0，从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点.

综上， $f(x)$ 有且仅有2个零点.