高二年级数学全体第二周第 1 课时 拓展答案

三角函数图象与性质的应用

一、填空题

1．若 $f\left(x\right)=\cos x-\sin x$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上是减函数，则 a 的最大值是______

【详解】$f\left(x\right)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，由题意得 $a>0$，故 $-a+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，

因为 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[-a,a\right]$ 上是减函数，

所以 $\begin{cases}-a+\dfrac{\pi}{4}\geq 0\\ a+\dfrac{\pi}{4}\leq\pi\\ a>0\end{cases}$ ，解得 $0<a\leq\dfrac{\pi}{4}$，所以 a 的最大值是 $\dfrac{\pi}{4}$.

2．若 $f(x)=4\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{12},\theta\right]$ 上的值域为 $[-2,4]$，则 θ 的值是______

【详解】当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\theta\right]$ 时，$2x+\dfrac{2\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right]$

$\because f\left(x\right)=4\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值域为 $\left[-2,4\right]$ $\quad\therefore\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

$\therefore 2\theta+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{6}$，解得：$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

二、解答题

3．已知 $f\left(x\right)=\sqrt{3}sin\dfrac{x}{4}cos\dfrac{x}{4}+cos^{2}\dfrac{x}{4}$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间；

（2）若 $f\left(\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$，求 $cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$ 的值；

（3）将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位得到 $y=g\left(x\right)$ 的图象，

若函数 $y=g\left(x\right)-k$ 在 $\left[0,\dfrac{7\pi}{3}\right]$ 上有唯一零点，求实数 k 的取值范围.

【详解】

(1)由于 $f\left(x\right)=\sqrt{3}sin\dfrac{x}{4}cos\dfrac{x}{4}+cos^{2}\dfrac{x}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$,

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$（$k\in Z$）,整理得 $\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi\le x\le 4k\pi+\dfrac{8\pi}{3}$（$k\in Z$）,所以函数的单调递减区间为 $[\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi,4k\pi+\dfrac{8\pi}{3}]$（$k\in Z$）.

(2)由题意 $f\left(\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$,则 $sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$,即 $sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,

由 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,则 $cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)=2cos^{2}\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}\right)-1=2-1=1$

(3)由函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位得到 $y=g\left(x\right)=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$ 的图象,由于 $x\in\left[0,\dfrac{7\pi}{3}\right]$,所以 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\ \pi\right]$,则函数 $y=g\left(x\right)-k$ 在 $\left[0,\dfrac{7\pi}{3}\right]$ 上有唯一点，即得函数 $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=k-\dfrac{1}{2}$ 图像在 $\left[0,\dfrac{7\pi}{3}\right]$ 上只有一个交点,所以当 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 或 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ 时，直线 $y=k-\dfrac{1}{2}$ 与函数 $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象只一个交点,则由 $k-\dfrac{1}{2}=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$ 或 $k-\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$,解得 $0\le k<\dfrac{1}{2}$ 或 $k=\dfrac{3}{2}$,即当 $0\le k<\dfrac{1}{2}$ 或 $k=\dfrac{3}{2}$ 时,函数 $y=g\left(x\right)-k$ 在 $\left[0,\dfrac{7\pi}{3}\right]$ 上有唯一零点.