

第二周第1课时 课后作业答案

1. 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$, 把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再把图象上各点的横坐标缩小到原来的一半, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 当

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 方程 $g(x) - k = 0$ 恰有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围为 ()

- A. $[1, \sqrt{3}]$ B. $[1, 2)$ C. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ D. $[\sqrt{3}, 2)$

【答案】B

【详解】由题意, 根据辅助角公式, 可得函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,

把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $f_1(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$,

再把函数 $f_1(x)$ 图象上各点的横坐标缩小到原来的一半, 得到函数 $g(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$,

令 $\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, 即函数 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增,

令 $\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$, 解得 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 即函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

且 $g(0) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$, $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{7\pi}{6} = -1$,

要使得方程 $g(x) - k = 0$ 恰好有两个不同的实数解, 即 $y = g(x)$ 与 $y = k$ 有两个不同的交点, 结合图象, 可得实数 k 的取值范围是 $1 \leq k < 2$, 即 $[1, 2)$.

2. 已知函数 $f(x) = 2 \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列判断错误的是 ()

- A. $f(x)$ 为偶函数 B. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
C. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$ D. $f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{8}, 0\right)$ 对称

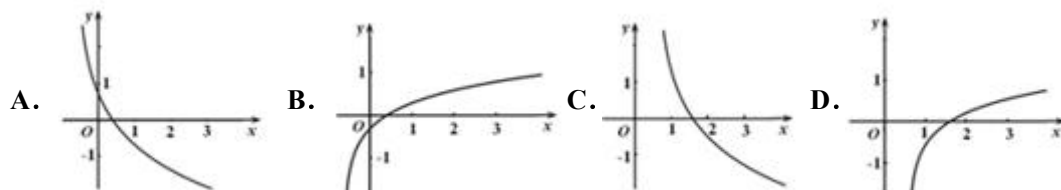
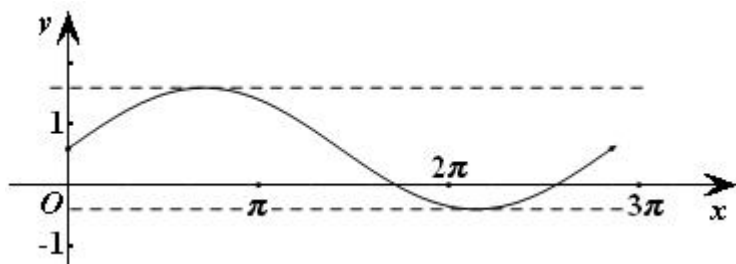
【答案】D

【详解】 $f(x) = 1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2 \cos 4x$,

$f(x)$ 为偶函数, A 正确; $4x = k\pi$, 得 $x = \frac{k\pi}{4}$, 当 $k=1$ 时, B 正确;

因为 $2 \cos 4x \in [-2, 2]$, $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-1, 3]$, C 正确; 故 D 错误. 故选 D.

3. 已知函数 $y = \sin ax + b (a > 0)$ 的图象如图所示, 则函数 $y = \log_a(x + b)$ 的图象可能是 ()



【答案】C

【解析】试题分析：由函数 $y = \sin ax + b (a > 0)$ 的图象可知, $a > 1, 0 < b < 1$, 所以函数 $y = \log_a(x + b)$ 的图象可能是 C。

4. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$, 给出下列四个结论:

①函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π

②函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上是减函数

③函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称

④函数 $f(x)$ 的图像可由函数 $y = 2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到

其中正确结论的个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【详解】解: $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

①因为 $\omega = 2$, 则 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$, 结论正确.

②当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$, $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上不是单调函数, 结论错误.

③因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ ，则函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 结论正确.

④函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到. 结论错误.

故正确结论有①③，故选 B.

5. 函数 $y=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间是 ()

A. $\left[2k-\frac{1}{4}, 2k+\frac{3}{4}\right] (k \in \mathbb{Z})$

B. $\left[2k+\frac{3}{4}, 2k+\frac{7}{4}\right] (k \in \mathbb{Z})$

C. $\left[2k-\frac{3}{4}, 2k+\frac{1}{4}\right] (k \in \mathbb{Z})$

D. $\left[2k+\frac{1}{4}, 2k+\frac{5}{4}\right] (k \in \mathbb{Z})$

【答案】C

【详解】令 $2k\pi-\pi \leq \pi x-\frac{\pi}{4} \leq 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，解得 $2k-\frac{3}{4} \leq x \leq 2k+\frac{1}{4} (k \in \mathbb{Z})$ ，

因此，函数 $y=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递增区间是 $\left[2k-\frac{3}{4}, 2k+\frac{1}{4}\right] (k \in \mathbb{Z})$.

6. 已知函数 $f(x)=2\sin x[\cos(x-\frac{\pi}{3})+\cos x]$ ，则函数 $f(x)$ 的最小正周期是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. 2π

D. 4π

【答案】B

【详解】解： $f(x)=2\sin x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\cos x\right)=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π ，故选：B.

7. 下列函数中最小正周期为 π 的是 ()

A. $y=\sin|x|$

B. $y=1+\sin x$

C. $y=|\cos x|$

D. $y=\tan 2x$

【答案】C

【详解】对 A 选项，令 $x=-\frac{3\pi}{2}$ ，则 $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left|-\frac{3\pi}{2}\right|=-1$

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}+\pi\right)=\sin\left|-\frac{\pi}{2}\right|=1, \text{ 不满足 } f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=f\left(-\frac{3\pi}{2}+\pi\right),$$

所以 $y=\sin|x|$ 不是以 π 为周期的函数，其最小正周期不为 π ；

对 B 选项, $y = 1 + \sin x$ 的最小正周期为: $T = 2\pi$;

对 D 选项, $y = \tan 2x$ 的最小正周期为: $T = \frac{\pi}{2}$; 排除 A、B、D 故选 C

8. 函数 $f(x) = \sqrt{4\sin x \cos x - 1}$ 的定义域是 ()

A. $\left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$

B. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$

C. $\left[2k\pi + \frac{\pi}{12}, 2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

【答案】D

【详解】因为 $f(x) = \sqrt{4\sin x \cos x - 1}$, 所以 $4\sin x \cos x - 1 \geq 0$, 即 $2\sin 2x - 1 \geq 0$,

解得 $k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$. 故选: D

9. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 函数 $f(x) = \sin 2x - 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ 的值域是 ()

A. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

B. $[-1, \sqrt{3}]$

C. $[-\sqrt{3}, 2]$

D. $[-1, 2]$

【答案】C 【详解】解: 由题意得

$$f(x) = \sin 2x - 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取最小值为 $-\sqrt{3}$, 所以值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$

10. 最小正周期为 π , 且图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称的一个函数是 ()

A. $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

B. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

C. $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

D. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

【答案】D

【详解】函数 $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, 故排除 A.

将 $x = \frac{\pi}{3}$ 代入 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 得: $y = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 此时 y 取得最大值,

所以直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 一条对称轴。