**如何研究一个几何图形的性质**

**——以角的平分线的性质为例 拓展资源**

**素材一：角平分线的尺规作图**

画图技能对学习几何非常重要，从一定程度上来说，画图即证明．那么如何画一个角的平分线呢？我们可以利用量角器进行度量，也可以利用尺规进行作图.

在之前的学习中，我们学习了角的平分线的相关知识.

角的平分线的定义：从一个角的顶点出发，把这个角分成相等的两个角的射线，叫做这个角的平分线.

角平分线性质定理：角的平分线上的点到角的两边的距离相等；角的内部到角的两边距离相等的点在角的平分线上.

下面，我们可以依据角的平分线的定义及性质，利用尺规作一个角的平分线.

1. 依据角的平分线的定义，作一个角的平分线.

已知：∠*AOB*.

求作：∠*AOB*的平分线.

作法：（1）以点*O*为圆心，适当长为半径画弧，交*OA*与点*M*，交*OB*于点*N*.

（2）分别以点*M*，*N*为圆心，大于的长为半径画弧，两弧在∠*AOB*的内部相交于点*C*.

1. 画射线*OC*.射线*OC*即为所求（如图1）.



图1

二、依据角的平分线的性质，作一个角的平分线.

已知：∠*AOB*.

求作：角的内部到角的两边距离相等的一点*P*.

作法1：（1）在射线*OB*上取一点*M*，过点*M*作射线*OB*的垂线，在这条垂线上取一点*H*，过点*H*作射线*OB*的平行线*l*1（如图2）.



图2

（2）在射线*OA*上取一点*N*，过点*N*作射线*OA*的垂线，在这条垂线上取一点*G*，使*NG*=*HM*，过点*G*作射线*OA*的平行线*l*2（如图3）.



图3

（3）直线*l*1与直线 *l*2相交于点*P*，则点*P*即为所求（如图4）.



图4

作法2:（1）以点*O*为圆心，适当长为半径画弧，交*OA*于点*M*，交*OB*于点*N*.

（2）分别过点*M*，*N*作射线*OA*，*OB*的垂线，两条垂线相交于点*P*.

（3）点*P*即为所求（如图5）.



图5

以上方法，让我们在角的内部确定了一点*P*到角的两边距离相等，那么作射线*OP*，则射线*OP*即为∠*AOB*的平分线. 你能读懂上面的方法吗？自己画一画，尝试一下吧！

**素材二：角平分线定理**

同学们，除了我们学习的角平分线的性质定理之外，三角形的角平分线还有其他的性质.

定理：三角形一个角的平分线分其对边所成的两条线段与这个角的两边对应成比例.

大家试一试，证明一下这个定理吧！

已知：如图6，在△*ABC*中，*AD*是∠*BAC*的平分线.

求证：=.



图6

法一（面积法）

证明：如图7，在△*ABC*中，*AD*是∠*BAC*的平分线.



图7

过点*D*作*DE*⊥*AB*于点*E*，*DF*⊥*AC*于点*F*.

∵*AD*是∠*BAC*的平分线，*DE*⊥*AB*，*DF*⊥*AC*，

∴*DE*=*DF*.

∵2S△*ABD*=*AB*∙*DE*，2S△*ACD*=*AC*∙*DF*，

∴S△*ABD*S△*ACD*=.

过点*A*作*AG*⊥*BC*，垂足为*G*，

∵2S△*ABD*=*BD*∙*AG*，2S△*ACD*=*CD*∙*AG*，

∴S△*ABD*:S△*ACD*=.

∴=.

法二（相似法）

（注：法二的证明需要用到相似三角形的知识，我们初三会学到. 同学们此时只需要将法二作为阅读素材了解即可.）

证明：如图8，过*B*作*BH*∥*AC*，交*AD*的延长线于*H*.



图8

∵*BH*∥*AC*，

∴△*ADC*∽△*HDB*，∠*CAH*=∠*BHA*.

∴=.

∵*AD*是∠*BAC*的角平分线，

∴∠*BAH*=∠*CAH*.

又∠*CAH*=∠*BHA*，

∴∠*BAH* =∠*BHA*.

∴*AB*=*BH*.

∴=，即=.

（注：过*C*作*CH*∥*AB*交*AD*的延长线于*H*同样可以证明.）

同学们，这个定理的证明还有很多种方法！随着我们学习的深入，后续我们还以继续研究.