

高一年级数学第 6 课时学习指南

函数与不等式 2

复习任务单

【学习目标】

- 1、了解函数与不等式的关系，体会函数与不等式的相互转化；
- 2、理解恒成立问题与存在问题的转化，掌握零点存在定理，结合不等式与函数知识解决求参数范围问题；
- 3、通过数形结合的方法解决问题，培养学生属分析问题的能力。

【学法指导】

函数与不等式是高中阶段比较重要的内容，也有相当的难度，每一类问题都有比较固定的方法去解决，比如，对于恒成立问题：首先把函数问题转化为不等式问题，然后利用常数分离求解参数问题，若不能将参数分离出来时，需要把转化得到的不等式再转化成函数，对函数中包含的参数进行讨论，从而得出参数的取值范围。将不等式问题转化为函数问题之后，常常需要判断函数与 x 轴的交点位置，所以，还需要灵活应用零点存在定理。此外，在函数与不等式中经常会碰到二次函数，对于二次函数需要熟练掌握韦达定理以及数形结合方法，尤其是利用数形结合方法判断零点存在位置，进而根据符合条件求解出参数的取值范围。题型以选择题为主，中档难度。

1、 回归教材，深刻理解

阅读教材，了解二次函数韦达定理以及零点存在性定理，理解函数与不等式的关系；掌握函数与不等式的互化并且能够进行互化，完成问题清单中的内容

2、 注重化归与转化的思想，数形结合的思想；

【问题清单】

问题 1:

函数与不等式有怎样的关系？

问题 2:

求解不等式中参数的取值范围有哪些方法?

思考:

(1) 二次函数的韦达定理指的是什么?

(2) 函数的零点存在性定理内容是什么?

(3) 含有参数的不等式怎么求解?

(4) 如何将恒成立问题转化成不等式?

(5) 如何转化存在问题?

【典型问题】

例 1: 恒成立问题

$x^2 - ax + 2a - 2 \leq 0$ 对任意的 $x \in [-1, 1]$ 恒成立, 求 a 的取值范围?

令 $f(x) = x^2 - ax + 2a - 2$, 则 $f(x)_{\max} \leq 0$, $x \in [-1, 1]$

又 $f(x)$ 是一个二次函数, 开口向上, 故最大值在端点处取得 (数形结合)

所以只需满足 $\begin{cases} 1 - a + 2a - 2 \leq 0 \\ 1 + a + 2a - 2 \leq 0 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a \leq 1 \\ a \leq \frac{1}{3} \end{cases}$, 据此可得 $a \leq \frac{1}{3}$;

综上所述, 实数 a 的取值范围是: $\left\{ a \mid a \leq \frac{1}{3} \right\}$.

例 2: 数形结合

$a < 1$ 时, $f(x) = (a-1)x^2 + 2x - 1$, 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$ 上与 x 轴有交点, 求 a 的取值范围?

当 $a < 1$ 时, $f(x) = (a-1)x^2 + 2x - 1$ 它是开口方向向下的二次函数, 又 $f(0) = -1$, 若

$f(x) = (a-1)x^2 + 2x - 1$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$ 上与 x 轴有交点,

则满足 $\Delta \geq 0$, 即 $4(a-1) \geq 0$, $a \geq 1$, $f(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{a-1}$, 考虑无根的情

况, 则 $\begin{cases} -\frac{1}{a-1} > 3 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \\ f(3) < 0 \end{cases}$, 解集为空。即 $0 \leq a < 1$ 时在 $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$ 上与 x 轴一定有交点。

【方法规律】应用数形结合解决问题的方法

- (1) 利用特殊函数的性质, 结合函数的零点存在性定理解决问题
- (2) 求解恒成立问题时, 一定要先把它转化成不等式
- (3) 利用二次函数解决问题时, 要重点关注开口方向, 判别式 Δ 的大小, 对称轴位置以及顶点。