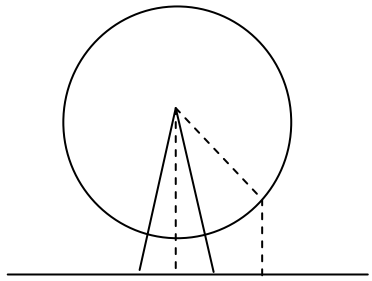
高一年级数学《三角函数的应用》拓展作业答案

1. $10\sin\dfrac{\pi t}{60}$　　2. 20℃，$y=10\sin(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{5}{4}\pi)+20$，$x\in[6,14]$

3. $\left[\dfrac{2\pi}{9},\dfrac{5\pi}{18}\right]$

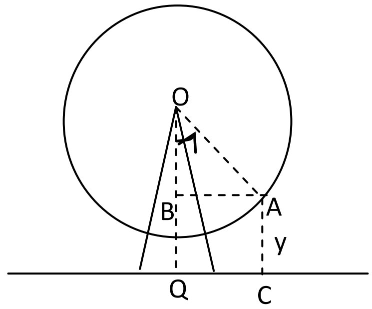
4. 解：（1）$\because$ 摩天轮的角速度 $\omega=\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$



$\therefore$ 最低点的角终边 OQ 到与地面的距离 y 的角终边 OA 的角 $\theta=\dfrac{\pi}{6}t$，

$\therefore y=45-40\cos\theta$，

即与地面的距离 y 与时间 t (min) 的函数关系式为 $y=45-40\cos\dfrac{\pi}{6}t$；



（2）令 $45-40\cos\dfrac{\pi}{6}t=65$ 得 $\cos\dfrac{\pi}{6}t=-\dfrac{1}{2}$，

$\because$ 第四次距离地面 65 米，即为第 2 周的第二次，

$\therefore \dfrac{\pi}{6}t=4\pi-\dfrac{2\pi}{3}$，　$t=20(\text{min})$，

即第四次距离地面 65 米时，用时 20min.

(3)当朋友距离地面高度 $y_2=45-40\cos\dfrac{\pi}{6}t$ 时，

这时自己距离地面高度 $y_1=45-40\cos\dfrac{\pi}{6}(t+2)$；

$\therefore y_1-y_2=40[\cos\dfrac{\pi}{6}t-\cos\dfrac{\pi}{6}(t+2)]$

当两人所处位置连线垂直地面时，距离之差最大，这 t=2.

即当你的朋友登上摩天轮 2min 后，第一次出现你和你的朋友与地面的距离之差最大；这个最大值为 40m.

($y_1-y_2=40[\cos\dfrac{\pi}{6}t-\cos\dfrac{\pi}{6}(t+2)]=40[\cos\dfrac{\pi}{6}t-\cos\dfrac{\pi}{6}t\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{6}t\sin\dfrac{\pi}{3}]$

$=40(\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\pi}{6}t)=40\sin\dfrac{\pi}{6}(t+1)$)

5．解　(1)由表中数据知周期 $T=12$,

$\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$,

由 $t=0$，$y=1.5$，得 $A+b=1.5$.

由 $t=3$，$y=1.0$，得 $b=1.0$.

$\therefore A=0.5$，$b=1$，$\therefore y=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}t+1$.

(2)由题知，当 $y>1$ 时才可对冲浪者开放，

∴$\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}t+1>1$，

∴$\cos\frac{\pi}{6}t>0$，∴$2k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}t<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $12k-3<t<12k+3(k\in\mathbf{Z})$．①

∵$0\leqslant t\leqslant 24$，故可令①中 k 分别为 0,1,2,

得 $0\leqslant t<3$ 或 $9<t<15$ 或 $21<t\leqslant 24$.

∴在规定时间上午 8∶00 至晚上 20∶00 之间，有 6 个小时时间可供冲浪者运动，即上午 9∶00 至下午 3∶00.

6. **解**：（Ⅰ）点 C 在半圆中点位置时，ΔABC 周长最大．理由如下：

法一：因为点 C 在半圆上，且 AB 是圆的直径，

所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，即 ΔABC 是直角三角形.

设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，显然 a，b，c 均为正数，则 $a^2+b^2=c^2$.

因为 $a^2+b^2\geq 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

所以 $2\left(a^2+b^2\right)\geq a^2+b^2+2ab=\left(a+b\right)^2$，

所以 $a+b\leq\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=\sqrt{2}c$，

所以 ΔABC 周长 $=a+b+c\leq\left(\sqrt{2}+1\right)c=2\sqrt{2}+2$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

即 ΔABC 为等腰直角三角形时，周长取得最大值．此时点 C 是半圆的中点．……5 分

法二：因为点 C 在半圆上，且 AB 是圆的直径，

所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，即 ΔABC 是直角三角形.

设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$\angle ABC=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，则

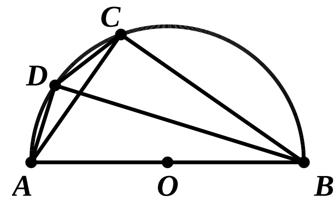
$a=c\cdot\cos\alpha$，$b=c\cdot\sin\alpha$，

$$\begin{aligned}\Delta ABC\text{ 周长}&=a+b+c\\&=c\cdot\cos\alpha+c\cdot\sin\alpha+c\\&=2\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)+2\\&=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2,\end{aligned}$$

因为$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{4}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$.

所以当$\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，$\Delta ABC$周长取得最大值$2\sqrt{2}+2$.

此时点C是半圆的中点. ………………………………5 分



（Ⅱ）（ⅰ）因为$AD=DC$，

所以$\angle ABD=\angle DBC=\theta$.

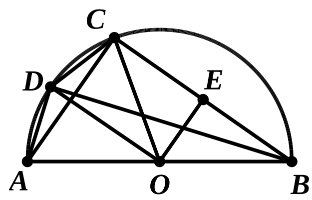
所以$AD=DC=AB\cdot\sin\theta$，$CB=AB\cdot\cos 2\theta$.

设四边形$ABCD$的周长为p，则

$$p=AD+DC+CB+AB$$

$$=2AB\sin\theta+AB\cos 2\theta+2=4\sin\theta+2\left(1-2\sin^2\theta\right)+2=5-4\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2.$$

显然$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$p$取得最大值$5$. ……………………10 分



（ⅱ）过O作$OE\perp BC$于E，设四边形$ABCD$的面积为s，四边形$AOCD$的面积为s_1，ΔBOC的面积为s_2，则

$$s=s_1+s_2=\frac{1}{2}AC\cdot OD+\frac{1}{2}BC\cdot OE$$

$$=\frac{1}{2}AB\sin 2\theta\cdot 1+\frac{1}{2}AB\cos 2\theta\cdot\sin 2\theta$$

$$=\sin 2\theta+\cos 2\theta\cdot\sin 2\theta$$

$$=\sin 2\theta\left(1+\cos 2\theta\right).$$

所以$s^2=\sin^2 2\theta\left(1+\cos 2\theta\right)^2$

$$=\left(1-\cos^2 2\theta\right)\left(1+\cos 2\theta\right)^2$$

$$=\left(1-\cos 2\theta\right)\left(1+\cos 2\theta\right)^3$$

$$=\frac{3}{3}\left(1-\cos 2\theta\right)\left(1+\cos 2\theta\right)^3$$

$$\le\frac{1}{3}\left[\frac{3\left(1-\cos 2\theta\right)+\left(1+\cos 2\theta\right)}{2}\right]^2\left(1+\cos 2\theta\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{3\left(1-\cos 2\theta\right)+\left(1+\cos 2\theta\right)}{2}\left(1+\cos 2\theta\right)\right]^2$$

$$\le \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{3(1-\cos 2\theta)+(1+\cos 2\theta)}{2}+(1+\cos 2\theta)}{2}\right]^{2\times 2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{3(1-\cos 2\theta)+(1+\cos 2\theta)+2(1+\cos 2\theta)}{4}\right]^{4}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{27}{16}.$$

当且仅当$3(1-\cos 2\theta)=1+\cos 2\theta$，即$\cos 2\theta=\frac{1}{2}$时，等号成立.

显然$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以$2\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以此时$\theta=\frac{\pi}{6}$.

所以当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$s=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，即四边形$ABCD$的最大面积是$\frac{3\sqrt{3}}{4}$