高一年级数学《三角函数的应用》学习指南

三角函数的应用

复习任务单

【学习目标】

1、会用三角函数 $y = A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 来解决一些简单的实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要的数学模型；

2、切身感受数学建模的过程，体验数学在解决实际问题中的价值和作用.

【学法指导】

在前面我们已经学习了三角函数的概念、图象与性质，特别研究了三角函数的周期性。在教科书中又专门设置“三角函数的应用”一节，目的是加强用三角函数模型刻画周期变化现象的学习，在现实生活中，如果某种变化着的现象具有周期性，可以考虑借助三角函数来描述。应用三角函数模型解决问题，首先要把实际问题抽象为数学问题，通过分析它的变化趋势，确定它的周期，从而建立适当三角函数模型，解决问题的一般程序是：

（1）审题：先审清楚题目条件、要求、理解数学关系。

（2）建模：分析题目周期性，选择适当三角函数模型。

（3）求解：对所建立的三角函数模型进行分析研究得到数学结论。

（4）还原：把数学结论还原为实际问题的解答。

在建立三角函数模型的时候，要注意数据周而复始的特点，本部分主要考查在实际问题中三角函数模型 $y = A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的建立和求解问题，考查方程与数形结合思想的应用意识．题型以填空题和解答题为主，属于中档难度.

掌握此小节内容需要理解函数周期性的意义，掌握三角函数定义和余弦函数的图像，有函数与方程和数形结合思想的应用意识.

【知识梳理】

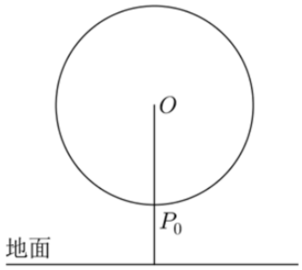
1、周期性函数的概念

若函数 $y = f(x)$ 对于定义域内的任意一点 x，都存在一个不等于 0 的常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，称 $f(x)$ 是周期函数，T 是它的一个周期.

限时 25 分钟，独立完成例题.

【典型问题】

【例 1】如图，一只蚂蚁绕一个竖直放置的圆环逆时针匀速爬行，已知圆环的半径为 1 米，圆环的圆心O距离地面的高度为 1.5 米，蚂蚁爬行一圈需要 4 分钟，且蚂蚁的起始位置在最低点P_0处：（1）试写出蚂蚁距离地面的高度h（米）关于时刻t（分钟）的函数关系式$h(t)$；（2）在蚂蚁绕圆环爬行一圈的时间内，有多长时间蚂蚁距离地面超过 1 米？



分析：相差 4 分钟的任意两个时刻，高度相同，所以高度h应该为关于时间 t 的周期性模型，考虑模型为三角函数模型$y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$，采用三角函数的定义求解

【解析】（1）以 O 点为圆心建立直角坐标系， 设 t 分钟后，蚂蚁爬行到点$A(x, y)$

由已知蚂蚁爬行一圈需要 4 分钟 ∴在时刻t所转过的圆心角为：$\dfrac{2\pi}{4}t = \dfrac{\pi}{2}t$

∴A 点在角$(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}t)$的终边上 ∴由三角函数的定义可得$\sin(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}t) = \dfrac{y}{r}$

∴ $y = \sin(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}t) = -\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}t) = -\cos(\dfrac{\pi}{2}t)$

∴蚂蚁爬行 t 分钟后，距离地面的高度为 $h = 1.5 - \cos(\dfrac{\pi}{2}t)(t \geq 0)$

（2） $h = 1.5 - \cos(\dfrac{\pi}{2}t) > 1 \therefore \cos(\dfrac{\pi}{2}t) < \dfrac{1}{2} \therefore \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{2}t < \dfrac{5}{3}\pi \therefore \dfrac{2}{3} < t < \dfrac{10}{3}$

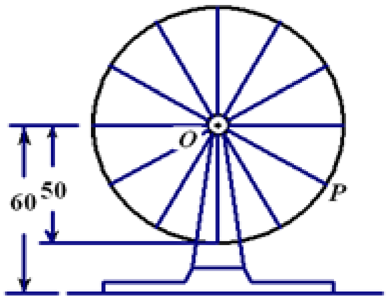
持续时间为：$\dfrac{10}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$ 分钟

∴在蚂蚁绕圆环爬行一圈的时间内，有$\dfrac{8}{3}$分钟的时间蚂蚁距离地面超过 1 米。

【例 2】如图，摩天轮上一点P在t时刻距离地面高度满足$y = A\sin(\omega t + \varphi) + b$，其中$A > 0, \omega > 0$ $\varphi \in [-\pi, \pi]$，已知某摩天轮的半径为50 米，点O距地面的高度为60 米，摩天轮做匀速转动，每3 分钟转一圈，点P的起始位置在摩天轮的最低点处.

（1）根据条件写出y（米）关于t（分钟）的解析式;

（2）在摩天轮转动的一圈内，有多长时间点P距离地面超过85 米?



分析:函数模型 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$ 为已知，只需求解参数 A、b、ω、φ，采用待定系数法求解

【解析】（1）由题设可知 $\begin{cases}A+b=110\\-A+b=10\end{cases}$ 所以 $A=50$，$b=60$，

又 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=3$， 所以 $\omega=\dfrac{2}{3}\pi$，从而 $y=50\sin(\dfrac{2\pi}{3}t+\varphi)+60$,

由题设知 $t=0$ 时 $y=10$，代入 $y=50\sin(\dfrac{2\pi}{3}t+\varphi)+60$,

得 $\sin\varphi=-1$，从而 $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$，

因此 $y=50\sin(\dfrac{2\pi}{3}t-\dfrac{\pi}{2})+60$, 即 $y=60-50\cos(\dfrac{2\pi}{3}t)(t\geq 0)$

（2）要使点 P 距离地面超过 85 米，则有 $y=60-50\cos(\dfrac{2\pi}{3}t)>85$，

有 $\cos(\dfrac{2\pi}{3}t)<-\dfrac{1}{2}$， 且 $0<\dfrac{2\pi}{3}t<2\pi$ ，

解得 $\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}t<\dfrac{4\pi}{3}$ 即 $1<t<2$，

所以，在摩天轮转动的一圈内，点 P 距离地面超过 85 米的时间有 1 分钟.

【方法提炼】当函数的模型为周期性模型 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$ 时，可采用两种方法求解：三角函数定义法和待定系数法，当给定模型类型时，可优先考虑待定系数法，而三角函数定义法能更直观的感受到模型的建立过程。