

高一年级数学《三角函数的图像和性质》学习指南

三角函数的图像和性质

复习任务单

【学习目标】

- 1、熟练掌握正余弦函数图像和性质；
- 2、借助于正弦函数的图像和性质，会求解一般函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质应用的综合问题；
- 3、渗透整体和数形结合的数学思想.

【学法指导】

在学习函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 函数前，先学习了正弦函数的图像，再根据它的图像得出了正弦函数的性质。对于一般函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图像，可以采用五点作图法或者通过对正弦函数的图像进行伸缩变化得到，进一步可以得到它的各种性质。但是对于含参函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ，五点作图法或者伸缩变化使用来都有些困难。本小节主要借助于正弦函数的性质，通过整体换元的思想来求解含参函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质的相关问题。

本部分知识主要考查正弦函数的图像和性质，考查整体换元思想和数形结合思想来研究一般三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质，题型有选择、填空或者解答的形式，属于中低档难度.

掌握此小节内容同学们可以回归到教材，了解正余弦函数图像的由来，熟练掌握基本的正余弦函数的图像和性质，会借助于正余弦函数的图像，求解一般函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质，比方说：周期、最值、单调性、对称性等等并且会实际应用，同时还需要熟练掌握辅助角公式.

【知识梳理】

- 1、正余弦函数图像的性质（其中 $k \in \mathbb{Z}$ ）

三角函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
最小正周期	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
奇偶性	奇	偶

单调性	$[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ 单调递增 $[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ 单调递减	$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 单调递增 $[(2k\pi, (2k+1)\pi]$ 单调递减
对称性	对称轴: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 对称中心: $(k\pi, 0)$	对称轴: $x = k\pi$ 对称中心: $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$
最值	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y_{\max} = 1$ $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ 时, $y_{\min} = -1$	$x = 2k\pi$ 时, $y_{\max} = 1$ $x = (2k+1)\pi$ 时, $y_{\min} = -1$

2、函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega \neq 0$) 的周期: $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$

3、辅助角公式:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

限时 25 分钟, 独立完成例题.

【典型问题】

【例 1】如果函数 $y = \sin 2x + a \cos 2x$ 的图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称, 那么 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 1 D. -1

分析: 只需要得到关于 a 的一个方程, 一是可以直接根据对称性得到方程, 还可以将同角异名函数转化成一个角的三角函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, 再利用对称轴的性质得到方程

【解析】(法一) $\because$ 函数 $y = f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$ 的图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称, $\therefore f(0) = f(-\frac{\pi}{4})$,

即 $0 + a = \sin(-\frac{\pi}{2}) + a \cos(-\frac{\pi}{2})$, 即 $a = -1$. 故选 D.

【解析】(法二) $y = \sin 2x + a \cos 2x = \sqrt{1 + a^2} \sin(2x + \varphi)$, $\tan \varphi = a$. $\because$ 函数 $y = \sin 2x + a \cos 2x$ 的

图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称, $\therefore$ 当 $x = -\frac{\pi}{8}$ 时, $y = \sin 2x + a \cos 2x$ 取得最大值或最小值,

$$\therefore \sin 2(-\frac{\pi}{8}) + a \cos 2(-\frac{\pi}{8}) = \sqrt{1+a^2} \text{ 或 } \sin 2(-\frac{\pi}{8}) + a \cos 2(-\frac{\pi}{8}) = -\sqrt{1+a^2}, \text{ 解得 } a = -1.$$

故选 D.

【答案】D

【例 2】已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 则 ω 的取值范围是()

A. $[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}]$

B. $[\frac{1}{3}, \frac{7}{6}]$

C. $[\frac{1}{4}, \frac{5}{6}]$

D. $[\frac{1}{4}, \frac{7}{6}]$

分析: 需要得到关于 ω 的不等式, 由题可知, 一是函数的周期应该大于 π , 二是 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 是 $f(x)$ 函数某个单调递减区间的子集, 进而得到关于 ω 的不等式

【解析】(法一) 根据题意知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期 $T \geq 2(\pi - \frac{\pi}{2}) = \pi$, $\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi$, $\therefore 0 < \omega \leq 2$. 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq \omega x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$, $\therefore \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega} \leq x \leq \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega}$, $k \in \mathbf{Z}$, $\therefore f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的单调递减区间为 $[\frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega}, \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega}]$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, $\therefore \begin{cases} \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega} \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{7\pi}{6\omega} \geq \pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, $\therefore 4k + \frac{1}{3} \leq \omega \leq 2k + \frac{7}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$. 又

$\therefore 0 < \omega \leq 2$, $\therefore k = 0$, $\therefore \frac{1}{3} \leq \omega \leq \frac{7}{6}$, 故选 B.

【解析】(法二) 当 $\omega = 1$ 时, $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 排除 A, C

当 $\omega = \frac{1}{4}$ 时, $f(x) = \sin(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3})$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 不单调, 故选 B

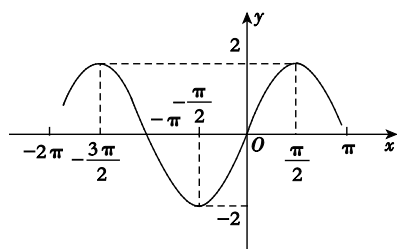
【答案】B

小结: 在做选择题时, 特殊值法也是一种简单有效的方法, 能极大的提高正确率.

【例 3】若函数 $y = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值是 -2 , 但最大值不是 2 , 则 ω 的取值范围是_____.

分析: 需要得到关于 ω 的不等式, 将 ωx 看成一个整体, 再分析 $y = 2\sin x$ 的图像得到不等式

【解析】当 $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $\therefore \omega > 0$, $\therefore \omega x \in [-\frac{\omega\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{4}]$, 且 $-\frac{\omega\pi}{3} < 0 < \frac{\omega\pi}{4}$. $\therefore$ 函数 $y = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值是 -2 , 但最大值不是 2 , $\therefore$ 根据函数 $y = 2\sin x$ 的图像, 如图所示,



可得
$$\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} < -\frac{\omega\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{\omega\pi}{4} < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$
 解得 $\frac{3}{2} \leq \omega < 2$, $\therefore \omega$ 的取值范围是 $[\frac{3}{2}, 2)$

【答案】 $[\frac{3}{2}, 2)$

【方法提炼】(1) 考虑端点值是否能取到时，只需要直接将端点值直接代入检验即可；

(2) 求解 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 性质的应用问题时，有两种方法可以考虑：一是借助于正弦函数图像和性质来求得 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像和性质再来求解问题，二是将 $\omega x + \varphi$ 看成整体转化为正弦函数，再利用正弦函数的图像和性质来求解问题。