

第 5.6 讲函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像

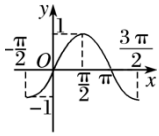
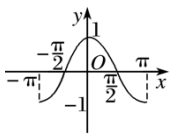
一、学习目标：

1. 会用五点法作出函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像，并会从图像变换角度分析由 $y = \sin x$ 到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的变化过程；
2. 会用换元法求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期，单调区间，最值，对称轴与对称中心等性质.

二、学法指导

1. 首先要熟知以前所学过的知识点：

函数 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的图像与性质：

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$
图象		
定义域		
值域		
周期性		
奇偶性		
递增区间		
递减区间		
对称中心		
对称轴方程		

2. 其次回顾初中所学的平移，对称，翻折等图像变换：

平移变换： $y = f(x) \rightarrow y = f(x + \varphi)$

对称变换： $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$ ； $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$ ； $y = f(x) \rightarrow y = -f(-x)$

翻折变换： $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|)$ ； $y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|$

3. 最后要熟知本节课的学习方法和重点内容

利用换元法求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间和小区间最值问题的一般步骤.

三、典型例题分析

例 1. 已知函数 $y = \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cdot \cos x + 1$, $x \in R$

- (1) 求函数的最大值及取得最大值时自变量 x 的取值范围；

(2) 该函数的图象可由 $y = \sin x (x \in R)$ 的图象经过什么样的平移和伸缩变换得到。

1 解:

(1)

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1 \\&= \frac{1}{4} (2 \cos^2 x - 1) + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} (2 \sin x \cos x) + 1 \\&= \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x + \frac{5}{4} \\&= \frac{1}{2} \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6} \right) + \frac{5}{4} \\&= \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{5}{4}\end{aligned}$$

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$, 即 $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\}$ $y_{\max} = 1$,

所以当 $y_{\max} = 1$ 时, 自变量 x 的集合为: $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\}$

① 把函数 $y = \sin x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$, 得到函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 的图像

② 把得到的图像上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到函数

$y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像

③ 把得到的图像上各点纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (横坐标不变), 得到函数

$y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像

④ 把得到的图像向上平移 $\frac{5}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4}$ 的图像:

综上得到函数 $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cdot \cos x + 1$ 的图像

例 2. 已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期, 及函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最值.

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})
 \end{aligned}$$

所以函数最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

解得: $\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间 $\left[\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z};$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

(2) $2x \in [0, \pi],$

$$2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{8}$ 时, $f(x)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)_{\max} = -\frac{1}{2}.$

例 3 已知函数 $f(x) = a \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos 2x$, 其中 $a > 0$.

(I) 比较 $f(\frac{\pi}{6}), f(\frac{\pi}{2})$ 的大小;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值.

解: (1) $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{a-1}{2}, f(\frac{\pi}{2}) = a+1$

$$f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{6}) = a+1 - \frac{a-1}{2} = \frac{a}{2} + \frac{3}{2}$$

$\because a > 0, \therefore f(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{6}) > 0,$

$\therefore f(\frac{\pi}{2}) > f(\frac{\pi}{6})$

$$\begin{aligned}(2) \quad f(x) &= a \sin x - \cos 2x = a \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + a \sin x - 1\end{aligned}$$

设 $t = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $t \in [-1, 1]$,

$y = t^2 + at - 1, t \in [-1, 1]$, 其对称轴为 $t = -\frac{a}{4}$

当 $-\frac{a}{4} \leq -1$, 即 $a \geq 4$ 时, $t = -1$ 时 $y_{\min} = 1 - a$;

当 $t = -\frac{a}{4} \in (-1, 1)$, 即 $-4 < a < 4$, 又 $a > 0$, 所以 $0 < a < 4$ 时

$t = -\frac{a}{4}$ 时 $y_{\min} = -1 - \frac{a^2}{8}$;

当 $-\frac{a}{4} \geq 1$, 即 $a \leq -4$, 因为 $a > 0$, 所以不研究此范围的最小值

综上: 当 $0 < a < 4$ 时, $y_{\min} = -1 - \frac{a^2}{8}$;

当 $a \geq 4$ 时, $y_{\min} = 1 - a$.