

向量法解决解析几何问题作业参考答案

【课后作业】参考答案

考试内容			要求层次			相应基础练习题
			A	B	C	
平面解析几何初步	圆与方程	圆的标准方程与一般方程			√	1. 过点 $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ 且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程是 <u>$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$</u> 2. 圆 $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ 的圆心坐标是 (D) A. (2,3) B. (-2,3) C. (-2,-3) D. (2,-3) 3. 方程 $x^2 + y^2 - 2x + m = 0$ 表示一个圆, 则 m 的范围是 (A) A. $m < 1$ B. $m < 2$ C. $m \leq \frac{1}{2}$ D. $m \leq 1$
		直线与圆的位置关系			√	4. 设圆的方程是 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y + (a-1)^2 = 0$, 若 $0 < a < 1$, 则原点与圆的位置关系是 (B) A. 原点在圆上 B. 原点在圆外 C. 原点在圆内 D. 不确定 5. 已知直线 $l: kx - y - 3 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 A 、 B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$, 则 $k =$ (B) A. ± 1 B. $\pm\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$ 6. 已知集合 $A = \{(x,y) y = \sqrt{9-x^2}\}$, $B = \{(x,y) y = x+b\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 b 的取值范围是 <u>$[-3, 3\sqrt{2}]$</u>
		两圆的位置关系		√		7. 已知两点 $A(0,0)$, $B(2,2)$ 到直线 l 的距离分别为 1 和 2, 这样的直线 l 条数为 (B) A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

解答题: 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 与抛物线 $C_2: y^2 = 2ax$ 相交于 A, B 两点, 且两曲线的焦点 F 重合.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 若过焦点 F 的直线 l 与椭圆分别交于 M, Q 两点, 与抛物线分别交于 P, N 两点, 是否存在斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l , 使得 $\frac{|PN|}{|MQ|} = 2$? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

【解】

(1) 椭圆的右焦点: $F(\sqrt{a^2-3}, 0)$; 抛物线焦点: $F(\frac{a}{2}, 0)$

依题意: $\sqrt{a^2-3} = \frac{a}{2}$ 解得: $a^2 = 4$ $a = 2$

椭圆方程: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 抛物线方程: $y^2 = 4x$

(2) 设 $M(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), P(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$

$$\frac{|PN|}{|MQ|} = \frac{|x_4 - x_3|}{|x_2 - x_1|} = 2$$

设直线 $l: y = k(x-1)$

$$\begin{cases} y = k(x-1) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \quad (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$$

$$(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4k^2-12}{3+4k^2} = \frac{144k^2+144}{(3+4k^2)^2}$$

$$|x_2 - x_1| = \frac{12\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}$$

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x-1) \end{cases} \quad k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 = 0$$

$$x_3 + x_4 = \frac{2k^2+4}{k^2}, x_3x_4 = 1$$

$$(x_4 - x_3)^2 = (x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4 = \frac{(2k^2+4)^2}{k^4} - 4 = \frac{16k^2+16}{k^4}$$

$$|x_4 - x_3| = \frac{4\sqrt{k^2+1}}{k^2}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_2 - x_1|} = \frac{3+4k^2}{3k^2} = 2 \quad k^2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{存在, } k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$