

巩固性作业答案

$$1. \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}; \quad \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \mathbf{n} \rangle|; \quad |\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|$$

2.解: (I) 因为 $A_1D \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $A_1D \perp AD$, $A_1D \perp CD$.

又因为底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形, 所以 $CD \perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

由题意得, $D(0,0,0)$, $C(0,1,0)$, $A_1(0,0,\sqrt{3})$, $D_1(-1,0,\sqrt{3})$,

$B_1(0,1,\sqrt{3})$, $B(1,1,0)$, $C_1(-1,1,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD_1} = (-2, -1, \sqrt{3})$.

因为 $A_1D \perp$ 底面 $ABCD$,

所以 $A_1D \perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1D \perp B_1D_1$,

又 $A_1C_1 \perp B_1D_1$, $A_1D \cap A_1C_1 = A_1$, 所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ,

所以平面 A_1C_1D 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$.

设直线 BD_1 与平面 A_1C_1D 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BD_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BD_1} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BD_1}| |\mathbf{n}|} = \frac{3}{4},$$

所以直线 BD_1 与平面 A_1C_1D 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$.

(II) $\overrightarrow{A_1C_1} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{A_1A} = (1, 0, \sqrt{3})$,

设平面 A_1C_1A 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$, $\begin{cases} -a + b = 0 \\ a - \sqrt{3}c = 0 \end{cases}$, 得 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$.

设二面角 $D-A_1C_1-A$ 的大小为 α ,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7},$$

所以二面角 $D-A_1C_1-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

3.解: (I) 因为 $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $C_1H \perp AH$, $C_1H \perp A_1H$.

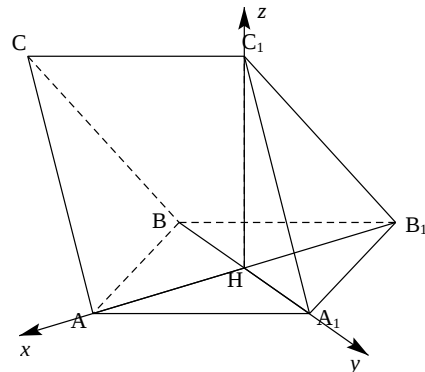
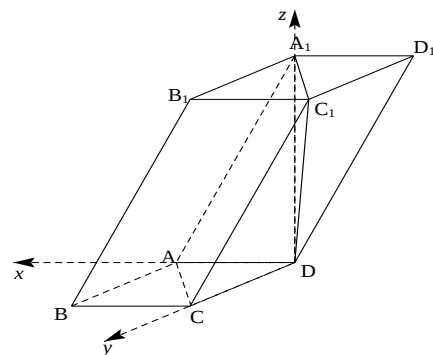
又因为底面 AA_1B_1B 是正方形, 所以 $A_1H \perp AH$

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

由题意得, $C_1(0,0,\sqrt{5})$, $A_1(0,2,0)$, $B_1(-2,0,0)$,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = (0, -2, \sqrt{5})$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (-2, -2, 0)$,

设异面直线 AC 与 A_1B_1 与所成角为 θ ,



$$\cos \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1B_1} \rangle \right| = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以异面直线 AC 与 A_1B_1 与所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$(II) \quad \overrightarrow{A_1C_1} = (0, -2, \sqrt{5}), \quad \overrightarrow{A_1A} = (2, -2, 0), \quad \overrightarrow{A_1B_1} = (-2, -2, 0)$$

$$\text{设平面 } A_1C_1A \text{ 的法向量为 } \mathbf{m} = (a, b, c), \quad \begin{cases} a - b = 0 \\ -2b + \sqrt{5}c = 0 \end{cases}, \quad \text{得 } \mathbf{m} = (\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2).$$

$$\text{设平面 } A_1B_1C_1 \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (a, b, c), \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b + \sqrt{5}c = 0 \end{cases}, \quad \text{得 } \mathbf{n} = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2).$$

设二面角 $A - A_1C_1 - B_1$ 的大小为 α ,

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{7},$$

所以二面角 $A - A_1C_1 - B_1$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.