

课后作业答案

1. 已知直线 l 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点 F ，与抛物线交于 A, B 两点，与其准线交于点 C 。若点 F 是 AC 的中点，则线段 BC 的长为

(A) $\frac{8}{3}$

(B) 3

(C) $\frac{16}{3}$

(D) 6

2. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为 ()

A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【解析】圆心到渐近线 $bx \pm ay = 0$ 距离为 $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{2b}{c} = \sqrt{3} \Rightarrow c = 2a \Rightarrow e = 2$ ，故选 A.

3. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B ，且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点)，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线 l 的方程为 $x = -1$ ，

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

则有 $A(-1, \frac{b}{a}), B(-1, -\frac{b}{a})$ ，

$$\therefore |AB| = \frac{2b}{a}, \quad \frac{2b}{a} = 4, \quad b = 2a,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{5}.$$

故选 D.

4. 【2019 年高考全国 I 卷理数】已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$ ， $F_2(1, 0)$ ，过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点。若 $|AF_2| = 2|F_2B|$ ， $|AB| = |BF_1|$ ，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】B

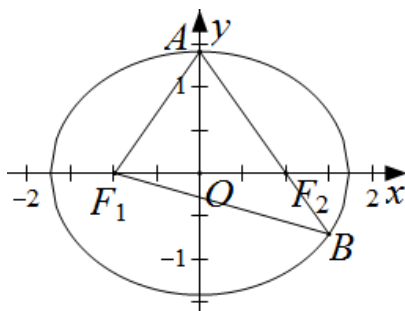
【解析】法一：如图，由已知可设 $|F_2B| = n$ ，则 $|AF_2| = 2n$ ， $|BF_1| = |AB| = 3n$ ，

由椭圆的定义有 $2a = |BF_1| + |BF_2| = 4n$ ， $\therefore |AF_1| = 2a - |AF_2| = 2n$ 。

在 $\triangle AF_1B$ 中，由余弦定理推论得 $\cos \angle F_1AB = \frac{4n^2 + 9n^2 - 9n^2}{2 \cdot 2n \cdot 3n} = \frac{1}{3}$ 。

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $4n^2 + 4n^2 - 2 \cdot 2n \cdot 2n \cdot \frac{1}{3} = 4$ ，解得 $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$\therefore 2a = 4n = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore a = \sqrt{3}$ ， $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3 - 1 = 2$ ， $\therefore$ 所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，故选 B。



法二：由已知可设 $|F_2B| = n$ ，则 $|AF_2| = 2n$ ， $|BF_1| = |AB| = 3n$ ，

由椭圆的定义有 $2a = |BF_1| + |BF_2| = 4n$ ， $\therefore |AF_1| = 2a - |AF_2| = 2n$ 。

在 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\begin{cases} 4n^2 + 4 - 2 \cdot 2n \cdot 2 \cdot \cos \angle AF_2F_1 = 4n^2 \\ n^2 + 4 - 2 \cdot n \cdot 2 \cdot \cos \angle BF_2F_1 = 9n^2 \end{cases}$ ，

又 $\angle AF_2F_1$ ， $\angle BF_2F_1$ 互补， $\therefore \cos \angle AF_2F_1 + \cos \angle BF_2F_1 = 0$ ，两式消去 $\cos \angle AF_2F_1$ ， $\cos \angle BF_2F_1$ ，

得 $3n^2 + 6 = 11n^2$ ，解得 $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。 $\therefore 2a = 4n = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore a = \sqrt{3}$ ， $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3 - 1 = 2$ ， $\therefore$ 所求椭圆

方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，故选 B。

5. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点， O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M , N . 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN| =$

A. $\frac{3}{2}$

B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

9. 已知 F_1 , F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

10. 设 F_1 , F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点, O 是坐标原点. 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为

A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$