

多角度探究一道解析几何高考题

一、教学内容分析：

圆锥曲线是解析几何的重要内容之一，也是高考重点考查的内容和热点，知识综合性较强，对学生的逻辑思维能力、运算能力等要求很高，这些问题重点考察学生方程思想、函数思想、转化与化归思想的应用. 定点问题是这类题目的典型代表，为了提高同学们的解题效率，特别是高考备考效率，本节课以一道高考题为例，对这一问题进行探究.

二、学情分析：

学生对圆锥曲线中的基础知识和基本方法有了一定的理解和掌握，学生具备一定的探究问题、分析问题和解决问题的能力，但对圆锥曲线中的综合问题的解决缺乏一个明确的“主线”，正确解答这类问题既要有较强的分析问题能力、几何直观能力还要有较强的运算能力，是对学生数学能力的综合体现，但这几方面学生都比较欠缺，这也是本节课需要对学生数学素养进行培育的重要着眼点.

三、学习目标：

1. 掌握圆锥曲线中解决问题的基本过程和解题策略.
2. 理解和掌握圆锥曲线中的基本知识与方法在处理综合问题中的应用，帮助学生自我建构圆锥曲线的思维导图，实现对圆锥曲线的章节整体把握.
2. 引导学生自我探究，让学生学会思考问题的方法，养成严谨的逻辑推理能力、运算能力和多角度思考分析问题和解决问题的能力.

四、教学重点：掌握圆锥曲线中解决问题的基本过程、运算能力；

五、教学难点：圆锥曲线基本知识和方法的综合运用；多角度分析问题的能力和运算能力的突破.

六、教学过程：

【例】：【2019 年高考北京卷理数】已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程；

(2) 设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N ，直线 $y = -1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B . 求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

【解析】(1) 由抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$ ，得 $p = 2$.

所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = -4y$ ，其准线方程为 $y = 1$.

在分析第二问之前，我们先来回顾以下解析几何解决问题的基本过程：

步骤一：根据几何问题和图形的特点，用代数语言把几何问题转化成为代数问题；

步骤二：根据对几何问题（图形）的分析，探索解决问题的思路；

步骤三：运用代数方法得到结论；

步骤四：给出代数结论合理的几何解释，解决几何问题

证法 1：几何问题直接代数化——几何图形坐标化（方程化）

(2) 抛物线 C 的焦点为 $F(0, -1)$.

设直线 l 的方程为 $y = kx - 1 (k \neq 0)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 = -4y \end{cases} \text{ 得 } x^2 + 4kx - 4 = 0.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 x_2 = -4$.

直线 OM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1} x$.

令 $y = -1$ ，得点 A 的横坐标 $x_A = -\frac{x_1}{y_1}$.

同理得点 B 的横坐标 $x_B = -\frac{x_2}{y_2}$.

设点 $D(0, n)$, 则 $\overrightarrow{DA} = \left(-\frac{x_1}{y_1}, -1-n\right)$, $\overrightarrow{DB} = \left(-\frac{x_2}{y_2}, -1-n\right)$,

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} + (n+1)^2$$

$$= \frac{x_1 x_2}{\left(-\frac{x_1^2}{4}\right)\left(-\frac{x_2^2}{4}\right)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{16}{x_1 x_2} + (n+1)^2$$

$$= -4 + (n+1)^2.$$

令 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$, 即 $-4 + (n+1)^2 = 0$, 则 $n=1$ 或 $n=-3$.

综上, 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$.

证法 2: 通过平面向量的数量积来研究平面几何中角问题一角的大小坐标化

(2) 抛物线 C 的焦点为 $F(0, -1)$.

设直线 l 的方程为 $y = kx - 1 (k \neq 0)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 = -4y \end{cases} \text{ 得 } x^2 + 4kx - 4 = 0.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 x_2 = -4$.

直线 OM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1} x$.

令 $y = -1$, 得点 A 的横坐标 $x_A = -\frac{x_1}{y_1}$. 则 $A\left(-\frac{x_1}{y_1}, -1\right)$

同理得点 B 的横坐标 $x_B = -\frac{x_2}{y_2}$. 则 $B\left(-\frac{x_2}{y_2}, -1\right)$

设以 AB 为直径的圆与 y 轴交于点 P, Q , 由圆中相交弦定理可得:

$$|AF||BF| = |PF||QF|, \text{ 又因为 } |PF| = |QF|, |AF||BF| = |x_A||x_B| = |x_A x_B| = 4$$

所以, $|PF| = |QF| = 2$

即: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上两个定点 $(0,1)$ 和 $(0,-3)$.

证法 3：利用平面几何的性质定理进行证明——线段长度坐标化

(2) 抛物线 C 的焦点为 $F(0, -1)$.

设直线 l 的方程为 $y = kx - 1 (k \neq 0)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 = -4y \end{cases} \text{ 得 } x^2 + 4kx - 4 = 0.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -4k$, $x_1 x_2 = -4$.

直线 OM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1} x$.

令 $y = -1$, 得点 A 的横坐标 $x_A = -\frac{x_1}{y_1}$. 则 $A(\frac{4}{x_1}, -1)$

同理得点 B 的横坐标 $x_B = -\frac{x_2}{y_2}$. 则 $B(\frac{4}{x_2}, -1)$

因此以 AB 为直径的圆的圆心 $(\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}, -1)$, 整理得圆心 $(2k, -1)$

$|AB|^2 = \left| \frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2} \right|^2 = 16k^2 + 16$, 半径 $r^2 = 4k^2 + 4$, 所以以 AB 为直径的圆的方程为:

$$(x - 2k)^2 + (y + 1)^2 = 4k^2 + 4, \text{ 令 } x = 0, \text{ 则 } (y + 1)^2 = 4$$

解得: $y_1 = -3$ 或 $y_2 = 1$

所以以 AB 为直径的圆经过 y 轴上两个定点 $(0, 1)$ 和 $(0, -3)$.

点评: 本题主要考查抛物线方程的求解与准线方程的确定, 直线与抛物线的位置关系, 圆的性质及其应用等知识, 意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

七、总结提炼:

1. 本题主要考查抛物线方程的求解与准线方程的确定, 直线与抛物线的位置关系, 圆的性质及其应用等知识, 意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

2. 解析几何的研究过程: “分析几何问题——几何问题代数化——处理代数问题——代数结论几何解释”;

3. 解析几何的难点是运算求解，掌握运算法则，探求运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果.
4. 深入挖掘平面几何图形性质，从多角度探究解决问题的思路，揭示解析几何的本质：用代数方法（坐标法）研究几何问题，用几何的眼光处理代数问题，体现形与数的结合，突出几何直观与代数运算之间的融合