

一道圆锥曲线高考题的解法探究——拓展提升任务答案

【填空题答案】

1 【答案】 $\sqrt{15}$

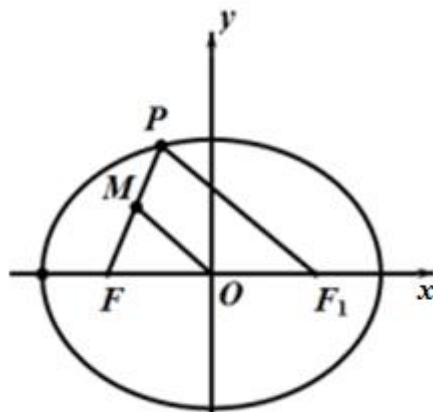
方法 1: 如图, 设 F_1 为椭圆右焦点. 由题意可知 $|OF| = |OM| = c = 2$,

由中位线定理可得 $|PF_1| = 2|OM| = 4$, 设 $P(x, y)$, 可得 $(x-2)^2 + y^2 = 16$,

与方程 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 联立, 可解得 $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{21}{2}$ (舍),

又点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方, 求得 $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, 所以

$$k_{PF} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{-\frac{3}{2} - 2} = \sqrt{15}.$$



方法 2: (焦半径公式应用) 由题意可知 $|OF| = |OM| = c = 2$,

由中位线定理可得 $|PF_1| = 2|OM| = 4$, 即 $a - ex_p = 4 \Rightarrow x_p = -\frac{3}{2}$,

从而可求得 $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, 所以 $k_{PF} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{-\frac{3}{2} - 2} = \sqrt{15}.$

2 【答案】 $(3, \sqrt{15})$

由已知可得 $a^2 = 36, b^2 = 20, \therefore c^2 = a^2 - b^2 = 16, \therefore c = 4$,

$$\therefore |MF_1| = |F_1F_2| = 2c = 8, \therefore |MF_2| = 4.$$

设点 M 的坐标为 $(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$, 则 $S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot y_0 = 4y_0$,

$$\text{又 } S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{8^2 - 2^2} = 4\sqrt{15}, \therefore 4y_0 = 4\sqrt{15}, \text{ 解得 } y_0 = \sqrt{15},$$

$$\therefore \frac{x_0^2}{36} + \frac{(\sqrt{15})^2}{20} = 1, \text{ 解得 } x_0 = 3 \text{ (} x_0 = -3 \text{ 舍去),}$$

M 的坐标为 $(3, \sqrt{15})$.

【解答题答案】

已知椭圆 C 的焦点为 $(-\sqrt{15}, 0), (\sqrt{15}, 0)$, 且椭圆 C 过点 $M(4, 1)$, 直线 $l: y = x + m$ 不过点 M , 且与椭圆交于不同的两点 A, B .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求证: 直线 MA, MB 与 x 轴总围成一个等腰三角形.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ (2) 详见解析

【解析】

【分析】

(1) 利用椭圆的定义先求出 $2a$ 的值, 可得出的值, 再利用 a, b, c 之间的关系求出 b 的值, 从而得出椭圆 C 的标准方程;

(2) 将直线 l 的方程与椭圆 C 的方程联立, 列出韦达定理, 利用斜率公式以及韦达定理计算出直线 MA, MB 的斜率互为相反数来证明结论成立.

【详解】

$$(1) \text{ 设椭圆的方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \text{ 则 } \begin{cases} a^2 - b^2 = 15 \\ \frac{16}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a^2 = 20 \\ b^2 = 5 \end{cases},$$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

$$(2) \text{ 将 } y = x + m \text{ 代入 } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ 并整理得 } 5x^2 + 8mx + 4m^2 - 20 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 20}{5}.$$

$\because$ 直线 $l: y = x + m$ 与椭圆交于不同的两点 A, B , $\therefore \Delta > 0$, 解得 $-5 < m < 5$,

$\therefore$ 直线 MA, MB 的斜率存在且不为零.

设直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1 和 k_2 , 只要证明 $k_1 + k_2 = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - 1}{x_1 - 4} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 4} = \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 4) + (y_2 - 1)(x_1 - 4)}{(x_1 - 4)(x_2 - 4)} \\ &= \frac{(x_1 + m - 1)(x_2 - 4) + (x_2 + m - 1)(x_1 - 4)}{(x_1 - 4)(x_2 - 4)} = \frac{2x_1 x_2 + (m - 5)(x_1 + x_2) - 8(m - 1)}{(x_1 - 4)(x_2 - 4)} \\ &= \frac{2 \times \frac{4m^2 - 20}{5} - \frac{8m(m - 5)}{5} - 8(m - 1)}{(x_1 - 4)(x_2 - 4)} = 0. \end{aligned}$$

故原命题成立.