

函数不等式专题

例 1. 在直角坐标系 xOy 中, 记函数 $f(x) = \log_3(8 - 2^x)$ 的图像为曲线 C_1 , 函数 $g(x) = \sqrt{x-3}$ 的图像为曲线 C_2 .

- (I) 比较 $f(2)$ 和 1 的大小, 并说明理由;
- (II) 当曲线 C_1 在直线 $y=1$ 的下方时, 求 x 的取值范围;
- (III) 记函数 $h(x)$ 的图像为 $C = C_1 \cup C_2$, 若方程 $h(x) - k = 0$ 恰有两解, 求 k 的取值范围.

例 2. 已知函数 $f(x) = \frac{|x|+1}{x^2-1}$.

- (I) 证明: $f(x)$ 为偶函数;
- (II) 用定义证明: $f(x)$ 是 $(1, +\infty)$ 上的减函数;
- (III) 当 $x \in [-4, -2]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

例 3. 已知函数 $f(x)$ 的图像在定义域 $(0, +\infty)$ 上连续不断. 若存在常数 $T > 0$, 使得对于任意的 $x > 0$, $f(Tx) = f(x) + T$ 恒成立, 称函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$.

- (I) 若 $f(x)$ 满足性质 $P(2)$, 且 $f(1) = 0$, 求 $f(4) + f(\frac{1}{4})$ 的值;
- (II) 若 $g(x) = \sqrt{x}$, 试判定函数 $g(x)$ 是否满足性质 $P(T)$, 并给予证明;
- (III) 若 $f(x) = \log_{1.2} x$, 试说明至少存在两个不等的正数 T_1, T_2 , 同时使得函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T_1)$ 和 $P(T_2)$. (参考数据: $1.2^4 = 2.0736$)

例 4. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) > 1$;
- (2) 关于 x 的方程 $f(x) + \log_2(x^2) = 0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的值;
- (3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

拓展提升任务：

1. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2ax - 3$.

(I) 若 $a=1$ ，求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集；

(II) 已知 $a > 0$ ，且 $f(x) \geq 0$ 在区间 $[3, +\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(III) 关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的正实数根 x_1, x_2 ，求 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x) = \log_a(2+x) - \log_a(2-x)$ ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$).

(I) 求函数 $f(x)$ 的定义域；

(II) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(III) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq \log_a(3x)$.

3. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：在定义域内存在实数 x_0 ，使得

$$f(x_0+1) = f(x_0) + f(1) \text{ 成立.}$$

(1) 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否属于集合 M ？并说明你的理由；

(2) 若函数 $f(x) = \lg \frac{a}{x^2+1} \in M$ ，求实数 a 的取值范围；

(3) 证明：函数 $f(x) = 2^x + x^2 \in M$ 。

4. 函数 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$ 。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ,

①求实数 k 的取值范围; ②证明: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 4$ 。