**函数不等式专题答案**

**例1.** 【解析】 （Ⅰ）因为，又函数是上的增函数，

所以．

（Ⅱ）因为“曲线在直线的下方”等价于“”，所以 ．

因为 函数是上的增函数，所以 ，即 ，

所以**的取值范围是 ．

（Ⅲ）因为有意义当且仅当，解得．

当 时，，从而，

所以，函数在上单调递减，且;

易证,函数在上单调递增,且；

要使方程恰有两解，则.

**例2** 【解析】

（Ⅰ）因为**，

所以**的定义域为，且．

对于任意，因为**，所以**为偶函数．

（Ⅱ）当**时，**．

任取，且，那么

．

因为 ， 所以 ，，

从而，即． 所以**是**上的减函数．

（Ⅲ）由（Ⅰ）、（Ⅱ）得，**在**上单调递增．

因为**，所以**，

所以当**时，**的值域是**．

**例3.** 【解析】

(Ⅰ) 因为满足性质，所以对于任意的，恒成立.

又因为，所以，，，

由可得，

由可得，

所以，.

(Ⅱ) 假设函数满足性质，则存在，使得对任意的都有（\*）恒成立，上述方程可化为，显然（否则等式不可能成立），解得，即对任意给定的，使等式（\*）成立的是唯一的，而并非对所有的恒成立，故函数不满足性质.

(Ⅲ)若正数满足，等价于（或者），

不妨设，（或者设， ）

显然，



因为的图像连续不断，所以存在，使得，

因此，至少存在两个不等的正数，使得函数同时满足性质和.

**例4.** 【解析】

（1） 由 ，得 ，解得 ．

（2） 有且仅有一解，

等价于 有且仅有一解，等价于 有且仅有一解．

当 时，，符合题意；

当 时，，．

综上， 或 ．

（3） 当 时，，，

所以 在 上单调递减．

函数 在区间 上的最大值与最小值分别为 ，．

，

即 ，对任意 成立．

方法一：（利用函数单调性求最值）因为 ，所以函数 在区间 上单调递增，所以 时， 有最小值 ，由 ，得 ．

故 的取值范围为 ．

方法二：（分参）不等式可化为，令，则只需求的最大值即可。

令，则，显然不是最大值，代入得，

因在单调递减，当，即时有最大值。

从而.

**拓展提升任务：**

1. 【解析】

(Ⅰ) 当时，由解得.

(Ⅱ) 当时，二次函数开口向上，对称轴为，

所以在上单调递增，

要使在恒成立，只需，

所以的取值范围是

(Ⅲ) 因为有两个不相等的正实数根，

所以， 解得，所以的取值范围是.

因为，所以，的取值范围是.

2． 【解析】

（Ⅰ）要使函数有意义，则   
解得，故函数的定义域为.

（Ⅱ），



所以函数为奇函数.

（Ⅲ），

所以，不等式可化为.

当时，，解得；

当时，，解得或.

**3.** 【解析】

（1） 假设，则存在 ，使得 ，

即 ，而此方程的判别式 ，方程无实数解，

所以，．

（2）因为，所以，即

，化简得: ;

当时，；

当时，由 得 且。

综上知，的取值范围是

（3）令 g，

则，

又 ，，故 ，

所以 在 上有实数解 ，

即存在实数 ，使得 成立，

所以，函数。

**4.** 【解析】

（1）当时，，为偶函数；

当时， ，显然，，

既不是奇函数，也不是偶函数。

（2）①

若两个零点，当时，则，即；

当时，则

若两个零点，因方程的两根，与矛盾，

综上知 .

②由①知函数的两个零点，则

，所以，从而，

而，，所以。