**函数不等式专题答案**

**例1.** 【解析】 （Ⅰ）因为，又函数是上的增函数，

 所以．

 （Ⅱ）因为“曲线在直线的下方”等价于“”，所以 ．

 因为 函数是上的增函数，所以 ，即 ，

 所以**的取值范围是 ．

 （Ⅲ）因为有意义当且仅当，解得．

当 $x\_{1}<x\_{2}<3$ 时，，从而，

所以，函数在上单调递减，且;

易证,函数在上单调递增,且；

要使方程恰有两解，则.

 **例2** 【解析】

（Ⅰ）因为**，

 所以**的定义域为，且．

 对于任意，因为**，所以**为偶函数．

（Ⅱ）当**时，**．

 任取，且，那么

 ．

 因为 ， 所以 ，，

 从而，即． 所以**是**上的减函数．

（Ⅲ）由（Ⅰ）、（Ⅱ）得，**在**上单调递增．

 因为**，所以**，

 所以当**时，**的值域是**．

**例3.** 【解析】

(Ⅰ) 因为满足性质，所以对于任意的，恒成立.

又因为，所以，，，

 由可得，

由可得，

所以，.

(Ⅱ) 假设函数满足性质，则存在，使得对任意的都有（\*）恒成立，上述方程可化为，显然（否则等式不可能成立），解得，即对任意给定的，使等式（\*）成立的是唯一的，而并非对所有的恒成立，故函数不满足性质.

(Ⅲ)若正数满足，等价于（或者），

 不妨设，（或者设， ）

显然，



因为的图像连续不断，所以存在，使得，

因此，至少存在两个不等的正数，使得函数同时满足性质和.

**例4.** 【解析】

（1） 由 $log\_{2}\left(\frac{1}{x}+1\right)>1$，得 $\frac{1}{x}+1>2$，解得 $\left\{x\left∣ \right.0<x<1\right\}$．

（2） $log\_{2}\left(\frac{1}{x}+a\right)+log\_{2}\left(x^{2}\right)=0$ 有且仅有一解，

等价于 $\left(\frac{1}{x}+a\right)x^{2}=1$ 有且仅有一解，等价于 $ax^{2}+x-1=0$ 有且仅有一解．

当 $a=0$ 时，$x=1$，符合题意；

当 $a\ne 0$ 时，$Δ=1+4a=0$，$a=-\frac{1}{4}$．

综上，$a=0$ 或 $-\frac{1}{4}$．

（3） 当 $0<x\_{1}<x\_{2}$ 时，$\frac{1}{x\_{1}}+a>\frac{1}{x\_{2}}+a$，$log\_{2}\left(\frac{1}{x\_{1}}+a\right)>log\_{2}\left(\frac{1}{x\_{2}}+a\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 上单调递减．

函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[t,t+1\right]$ 上的最大值与最小值分别为 $f\left(t\right)$，$f\left(t+1\right)$．

 $f\left(t\right)-f\left(t+1\right)=log\_{2}\left(\frac{1}{t}+a\right)-log\_{2}\left(\frac{1}{t+1}+a\right)\leq 1$，

即 $at^{2}+\left(a+1\right)t-1\geq 0$，对任意 $t\in \left[\frac{1}{2},1\right]$ 成立．

方法一：（利用函数单调性求最值）因为 $a>0$，所以函数 $y=at^{2}+\left(a+1\right)t-1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，所以 $t=\frac{1}{2}$ 时，$y$ 有最小值 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}$，由 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}\geq 0$，得 $a\geq \frac{2}{3}$．

故 $a$ 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3},+\infty \right)$．

方法二：（分参）不等式可化为，令，则只需求的最大值即可。

令，则，显然不是最大值，代入得，

因在单调递减，当，即时有最大值。

从而.

**拓展提升任务：**

1. 【解析】

(Ⅰ) 当时，由解得.

(Ⅱ) 当时，二次函数开口向上，对称轴为，

所以在上单调递增，

要使在恒成立，只需，

所以的取值范围是

(Ⅲ) 因为有两个不相等的正实数根，

所以， 解得，所以的取值范围是.

因为，所以，的取值范围是.

2． 【解析】

（Ⅰ）要使函数有意义，则
解得，故函数的定义域为.

（Ⅱ），



所以函数为奇函数.

（Ⅲ），

所以，不等式可化为.

当时，，解得；

当时，，解得或.

**3.** 【解析】

（1） 假设，则存在 $x\_{0}$，使得 $\frac{1}{x\_{0}+1}=\frac{1}{x\_{0}}+\frac{1}{1}$，

即 $x\_{0}^{2}+x\_{0}+1=0$，而此方程的判别式 $Δ=1-4=-3<0$，方程无实数解，

所以，．

（2）因为，所以，即

，化简得: ;

当时，；

当时，由 得 且。

综上知，的取值范围是

（3）令 g$\left(x\right)=f\left(x+1\right)-f\left(x\right)-f\left(1\right)$，

则$g\left(x\right)=2^{x+1}+\left(x+1\right)^{2}-2^{x}-x^{2}-2-1=2\left(2^{x-1}+x-1\right)$，

又 $g\left(0\right)=-1$，$g\left(1\right)=2$，故 $g\left(0\right)⋅g\left(1\right)<0$，

所以 $g\left(x\right)=f\left(x+1\right)-f\left(x\right)-f\left(1\right)=0$ 在 $\left(0,1\right)$ 上有实数解 $x\_{0}$，

即存在实数 $x\_{0}$，使得 $f\left(x\_{0}+1\right)=f\left(x\_{0}\right)+f\left(1\right)$ 成立，

所以，函数。

**4.** 【解析】

（1）当时，，为偶函数；

当时， ，显然，，

 既不是奇函数，也不是偶函数。

（2）①

若两个零点，当时，则，即；

 当时，则

若两个零点，因方程的两根，与矛盾，

 综上知 .

②由①知函数的两个零点，则

，所以，从而，

而，，所以。