# 解析几何中的定点问题作业答案

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">考试内容</td><td colspan="3">要求层次</td><td rowspan="2">相应基础练习题</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr>
<tr><td rowspan="8">平面解析几何初步</td><td rowspan="8">直线与方程</td><td>直线的倾斜角和斜率</td><td></td><td>√</td><td></td><td>1.已知直线 $l$ 的倾斜角的变化范围是$(\frac{\pi}{3}，\frac{3\pi}{4}]$，则该直线的斜率 $k$ 的变化范围是$\underline{(-\infty,-1]\cup(\sqrt{3},+\infty)}$</td></tr>
<tr><td>过两点的直线斜率的计算公式</td><td></td><td></td><td>√</td><td>2．过不重合的$A(m^2+2,m^2-3),B(3-m-m^2,2m)$两点的直线 $l$ 倾斜角为 45°，则 $m$ 的取值为（　B　）<br>A. $m$=-1　　B.$m$=-2　　C. $m$=-1 或 2　　D.$m$=1 或-2</td></tr>
<tr><td>两条直线平行或垂直的判定</td><td></td><td></td><td>√</td><td>3．“$a=2$”是“$ax+y-2=0$与直线$2x+(a-1)y+4=0$平行”的（A ）<br>A. 充要条件　　B. 充分不必要条件<br>C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件<br><br>4．直线 2$x$-$y$-2=0 绕它与 $y$ 轴的交点逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$所得的直线方程是（ D ）<br>A. -$x$+2$y$-4=0　B.$x$+2$y$-4=0 C.-$x$+2$y$+4=0　D. $x$+2$y$+4=0</td></tr>
<tr><td>直线方程的点斜式、两点式及一般式</td><td></td><td></td><td>√</td><td>5．下列说法的正确的是（ D ）<br>A．经过定点$P_0(x_0，y_0)$的直线都可以用方程$y-y_0=k(x-x_0)$表示<br>B．经过定点$A(0，b)$的直线都可以用方程$y=kx+b$表示<br>C．不经过原点的直线都可以用方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$表示<br>D 经过任意两个不同的点$P_1(x_1，y_1)$、$P_2(x_2，y_2)$的直线都可以用方程$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$来表示<br><br>6．经过点 P(3,-1)，且在 $x$ 轴上的截距等于在 $y$ 轴上的截距的 2 倍的直线 $l$ 的方程是$\underline{x+2y-1=0}$或$\underline{x+3y=0}$.</td></tr>
<tr><td>两条相交直线的交点坐标</td><td></td><td>√</td><td></td><td>7．若直线$2x-ay+2=0$与直线$x+y=0$的交点的纵坐标小于0，则 （ C ）<br>A．$a>-2$　　B．$a>2$　C．$a<-2$　D．$a<-4$</td></tr>
<tr><td>两点间的距离公式、点到直线的距离公式</td><td></td><td></td><td>√</td><td>8.点(1,2)到直线 $y$=2$x$+1 的距离为（　A ）<br>A.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C.$\sqrt{5}$　　D.$2\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>两条平行线间的距离</td><td></td><td>√</td><td></td><td>9.若两直线 $ax$+2$y$-1=0 与 $x$+($a$-1)$y$+$a^2$=0 平行，则这两条直线间的距离为（ C ）<br>A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$　　D. $\sqrt{5}$或$\frac{9\sqrt{2}}{4}$</td></tr>
</table>

解答题已知抛物线 $C: x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$.

（Ⅰ）求抛物线 $C$ 的方程及其准线方程;

（Ⅱ）设 $O$ 为原点，过抛物线 $C$ 的焦点作斜率不为 0 的直线 $l$ 交抛物线 $C$ 于两点 $M$， $N$，直线 $y=-1$ 分别交直线 $OM$， $ON$ 于点 $A$ 和点 $B$．求证：以 $AB$ 为直径的圆经过 $y$ 轴上的两个定点.

【思路分析】（Ⅰ）代入点 $(2,-1)$，解方程可得 $p$，求得抛物线的方程和准线方程;

（Ⅱ）抛物线 $x^2=-4y$ 的焦点为 $F(0,-1)$，设直线方程为 $y=kx-1$，联立抛物线方程，运用韦达定理，以及直线的斜率和方程，求得 $A$，$B$ 的坐标，可得 $AB$ 为直径的圆方程，可令 $x=0$，解方程，即可得到所求定点.

【解析】:（Ⅰ）抛物线 $C: x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$．可得 $4=2p$，即 $p=2$，

可得抛物线 $C$ 的方程为 $x^2=-4y$，准线方程为 $y=1$；

（Ⅱ）证明：抛物线 $x^2=-4y$ 的焦点为 $F(0,-1)$，

设直线方程为 $y=kx-1$，联立抛物线方程，可得 $x^2+4kx-4=0$，

设 $M(x_1, y_1)$， $N(x_2, y_2)$，

可得 $x_1+x_2=-4k$， $x_1x_2=-4$，

直线 $OM$ 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，即 $y=-\dfrac{x_1}{4}x$，

直线 $ON$ 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2}x$，即 $y=-\dfrac{x_2}{4}x$，

可得 $A(\dfrac{4}{x_1}, -1)$， $B(\dfrac{4}{x_2}, -1)$，

可得 $AB$ 的中点的横坐标为 $2(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})=2\bullet\dfrac{-4k}{-4}=2k$，

即有 $AB$ 为直径的圆心为 $(2k,-1)$，

半径为 $\dfrac{|AB|}{2}=\dfrac{1}{2}|\dfrac{4}{x_1}-\dfrac{4}{x_2}|=2\bullet\dfrac{\sqrt{16k^2+16}}{4}=2\sqrt{1+k^2}$，

可得圆的方程为 $(x-2k)^2+(y+1)^2=4(1+k^2)$，

化为 $x^2-4kx+(y+1)^2=4$，

由 $x=0$，可得 $y=1$ 或 $-3$.

则以 $AB$ 为直径的圆经过 $y$ 轴上的两个定点 $(0,1)$， $(0,-3)$.

【归纳与总结】本题考查抛物线的定义和方程、性质，以及圆方程的求法，考查直线和抛物线方程联立，运用韦达定理，考查化简整理的运算能力，属于中档题.