

【课后作业】

(1) 函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的单调递减区间为_____.

【答案】 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] (k \in \mathbb{Z})$

(2) 函数 $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ 的单调减区间是_____.

【答案】 $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right)$

(3) 函数 $f(x) = x^2 - 2bx + 6$ 在区间 $(2, 8)$ 内是增函数, 则实数 b 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 2]$

(4) 三次函数 $y = x^3 - ax^2 + ax - 3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[0, 3]$

(5) 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + x \ln x - x$ 存在单调递增区间, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > -\frac{1}{e}$

(6) 已知函数 $f(x) = x^2 - (a+2)x + a \ln x (a \in \mathbb{R})$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 易知 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$$\text{且 } f'(x) = 2x - (a+2) + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - (a+2)x + a}{x^2} = \frac{(2x-a)(x-1)}{x^2}.$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \text{ 解得 } x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = 1$$

当 $a \leq 0$ 即 $\frac{a}{2} \leq 0$ 时

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

当 $0 < a < 2$ 即 $0 < \frac{a}{2} < 1$ 时

x	$(0, \frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

当 $a = 2$ 即 $\frac{a}{2} = 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 2$ 即 $\frac{a}{2} > 1$ 时,

x	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{a}{2}, 1)$ 上单调递减;

当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$, $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{a}{2})$ 上单调递减.

(7) 已知函数 $f(x) = \ln x - xe^x + ax (a \in \mathbf{R})$.

(I) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围;

(II) 若 $a = 1$, 求 $f(x)$ 的最大值.

【答案】(I) 由题意知, $f'(x) = \frac{1}{x} - (e^x + xe^x) + a = \frac{1}{x} - (x+1)e^x + a \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $a \leq (x+1)e^x - \frac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x}$, 则 $g'(x) = (x+2)e^x + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 2e - 1$,

所以 $a \leq 2e - 1$.

(II) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - xe^x + x (x > 0)$.

则 $f'(x) = \frac{1}{x} - (x+1)e^x + 1 = (x+1)(\frac{1}{x} - e^x)$,

令 $m(x) = \frac{1}{x} - e^x$, 则 $m'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x < 0$,

所以 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由于 $m(\frac{1}{2}) > 0$, $m(1) < 0$, 所以存在 $x_0 > 0$ 满足 $m(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $m(x) > 0$, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $m(x) < 0$, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)_{\max} = f(x_0) = \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + x_0$,

因为 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 所以 $x_0 = -\ln x_0$,

所以 $f(x_0) = -x_0 - 1 + x_0 = -1$,

所以 $f(x)_{\max} = -1$.