作业 1 已知离心率为e的椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$恰过两点$(1,e)$和$(2,0)$.

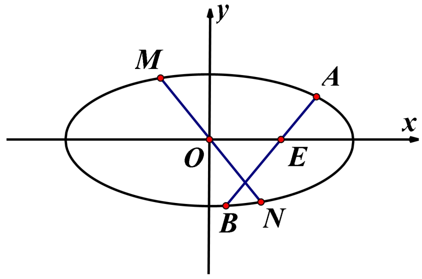
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知 AB,MN 为椭圆 C 上的两动弦,其中 M,N 关于原点 O 对称,AB 过点 $E(1,0)$,且 AB,MN 斜率互为相反数. 试问:直线 AM,BN 的斜率之和是否为定值?证明你的结论.

解析:

(1) 由题意:$\begin{cases} a=2 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{e^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b^2=1 \end{cases}$ 所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 设 AB 方程为 $y=k(x-1)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,



则 MN 方程为 $y=-kx$

又设 $M(x_3,-kx_3)$, $N(-x_3,kx_3)$

$$k_{AM}+k_{BN}=\frac{y_1+kx_3}{x_1-x_3}+\frac{y_2-kx_3}{x_2+x_3}=\frac{k(x_1-1)+kx_3}{x_1-x_3}+$$

则整理得:$k_{AM}+k_{BN}=\dfrac{k\left[(x_1+x_3-1)(x_2+x_3)+(x_2-x_3-1)(x_1-x_3)\right]}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}$

$$k_{AM}+k_{BN}=\frac{k\left[2x_1x_2+2x_3{}^2-(x_1+x_2)\right]}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)} \qquad ①$$

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$消元整理得:$(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1}$, $x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}$ ②

又由$\begin{cases} y=-kx \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$消元整理得:

$(4k^2+1)x^2=4$,所以 $x_3{}^2=\dfrac{4}{4k^2+1}$ ③

将②、③代入①式得:$k_{AM}+k_{BN}=0$.

作业 2 已知抛物线 C 的顶点在坐标原点，焦点 x 轴上，$P(2，0)$为定点．

(Ⅰ)若点 P 为抛物线的焦点，求抛物线 C 的方程；

(Ⅱ)若动圆 M 过点 P，且圆心 M 在抛物线 C 上运动，点 A, B 是圆 M 与 y 轴的两交点，试推断是否存在一条抛物线 C，使$|AB|$为定值？若存在，求这个定值；若不存在，说明理由．

解:(Ⅰ) 设抛物线方程为 $y^2=2px(p\neq 0)$，则抛物线的焦点坐标为$(\frac{p}{2},0)$.由已知，$\frac{p}{2}=2$，即 $p=4$，故抛物线 C 的方程是 $y^2=8x$．

(Ⅱ)设圆心 $M(a,b)$ ($a\geq 0$)，点 A $(0,y_1)$，B $(0,y_2)$．因为圆 M 过点 P(2，0)，则可设圆 M 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=(a-2)^2+b^2$． 令 $x=0$，得 $y^2-2by+4a-4=0$.则 $y_1+y_2=2b$， $y_1\cdot y_2=4a-4$．所以

$|AB|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\sqrt{4b^2-16a+16}$． ，设抛物线 C 的方程为

$y^2=mx(m\neq 0)$，因为圆心 M 在抛物线 C 上，则 $b^2=ma$．所以

$|AB|=\sqrt{4ma-16a+16}=\sqrt{4a(m-4)+16}$．由此可得，当 $m=4$ 时，$|AB|=4$ 为定值．故存在一条抛物线 $y^2=4x$，使|AB|为定值 4.