课后作业答案

1. 【解】(I) 由题意知 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, 即 $a^2 = 4b^2$,

又因为 $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}} = 1$, 所以 $a^2 = 4, b^2 = 1$,

故椭圆 C 的方程为 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 由题意知直线 PN 的斜率存在, 设直线 PN 的方程为 $y = k(x-4)$ ①

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x-4) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得: } (4k^2 - 1)x^2 - 32k^2x + 4(16k^2 - 1) = 0,$$

由 $\Delta = (32k^2)^2 - 4(4k^2 - 1)(64k^2 - 4) > 0$ 得 $12k^2 - 1 < 0$,

又 $k = 0$ 不合题意,

所以直线 PN 的斜率的取值范围是 $-\frac{\sqrt{3}}{6} < k < 0$ 或 $0 < k < \frac{\sqrt{3}}{6}$.

(III) 设点 $N(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$, 则 $M(x_1, -y_1)$,

直线 ME 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$,

令 $y = 0$, 得 $x = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 + y_1}$,

将 $y_1 = k(x_1 - 4), y_2 = k(x_2 - 4)$ 代入整理,

$$\text{得 } x = \frac{2x_1x_2 - 4(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - 8}. \quad \text{②}$$

由得① $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2 - 1}, x_1x_2 = \frac{64k^2 - 4}{4k^2 - 1}$

代入②整理, 得 $x = 1$,

所以直线 ME 与 x 轴相交于定点 $(1, 0)$.

2. 【解】(I) 设点 $M(x_0, y_0), P(x, y)$, 由题意可知 $N(x_0, 0)$,

因为 $2\overrightarrow{PN} = \sqrt{3}\overrightarrow{MN}$, 所以 $2(x_0 - x, -y) = \sqrt{3}(0, -y_0)$,

即 $x_0 = x, y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}y$,

又点 M 在圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 4$,

将 $x_0 = x, y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}y$ 代入得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

即轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 由 (I) 可知 $D(-2, 0)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立得} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2-3) = 0,$$

$$\Delta = (8mk)^2 - 4(3+4k^2)(4m^2-12) > 0,$$

$$\text{即 } 3+4k^2-m^2 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1+x_2 = -\frac{8km}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4(m^2-3)}{3+4k^2},$$

$$y_1y_2 = (kx_1+m)(kx_2+m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1+x_2) + m^2 = \frac{3m^2-12k^2}{3+4k^2},$$

因为 $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}|$, 所以 $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB}$, 即 $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$,

$$\text{即 } (x_1+2, y_1) \cdot (x_2+2, y_2) = x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 + y_1y_2 = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{4(m^2-3)}{3+4k^2} + 2 \times \frac{-8mk}{3+4k^2} + 4 + \frac{3m^2-12k^2}{3+4k^2} = 0,$$

$$\text{所以 } 7m^2 - 16mk + 4k^2 = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = 2k, m_2 = \frac{2k}{7}, \text{ 且均满足 } 3+4k^2-m^2 > 0,$$

当 $m_1 = 2k$ 时, l 的方程为 $y = kx + 2k = k(x+2)$, 直线恒过点 $(-2, 0)$, 与已知矛盾;

当 $m_2 = \frac{2k}{7}$ 时, l 的方程为 $y = kx + \frac{2k}{7} = k(x + \frac{2}{7})$, 直线恒过点 $(-\frac{2}{7}, 0)$.

综上, 直线 l 过定点, 定点坐标为 $(-\frac{2}{7}, 0)$.