

课后作业

1. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 以原点为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + \sqrt{2} = 0$ 相切.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 $P(4, 0)$, M 、 N 是椭圆 C 上关于 x 轴对称的任意两个不同的点, 连结 PN 交椭圆 C 于另一点 E , 求直线 PN 的斜率的取值范围;

(III) 在 (II) 的条件下, 证明直线 ME 与 x 轴相交于定点.

2. 设 M 点为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上的动点, 点 M 在 x 轴上的投影为 N 动点 P 满足

$2\overrightarrow{PN} = \sqrt{3}\overrightarrow{MN}$, 动点 P 的轨迹为 E .

(I) 求 E 的方程;

(II) 设 E 的左顶点为 D , 若直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 交于 A, B 两点 (A, B 不是左、右顶点), 且满足 $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}|$, 求证: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.