圆锥曲线中的定值问题-------拓展作业答案

1、 $y=\pm\sqrt{2}x$

2、$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

3. 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的一个顶点为$(0,\sqrt{3})$，离心率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）设过椭圆右焦点的直线l_1交椭圆于A、B两点，过原点的直线l_2交椭圆于C、D两点．若$l_1 \parallel l_2$，

求证：$\frac{|CD|^2}{|AB|}$ 为定值

解：（Ⅰ）依题意，$b=\sqrt{3}$.

由$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$，得$a^2=\frac{4}{3}b^2=4$.

∴椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）证明：(1）当直线AB的斜率不存在时，易求$|AB|=3$，$|CD|=2\sqrt{3}$，

则$\frac{|CD|^2}{|AB|}=4$.

（2）当直线AB的斜率存在时，

设直线AB的斜率为k，依题意$k\neq 0$，

则直线AB的方程为$y=k\left(x-1\right)$，直线CD的方程为$y=kx$.

设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$C\left(x_3,y_3\right)$，$D\left(x_4,y_4\right)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=k\left(x-1\right)\end{cases}$得$\left(3+4k^2\right)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

则$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2-4\left(\frac{4k^2-12}{3+4k^2}\right)}=\frac{12\left(1+k^2\right)}{3+4k^2}.$$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx\end{cases}$整理得$x^2=\dfrac{12}{3+4k^2}$，则$\left|x_3-x_4\right|=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3+4k^2}}$.

$$\left|CD\right|=\sqrt{1+k^2}\left|x_3-x_4\right|=4\sqrt{\frac{3\left(1+k^2\right)}{3+4k^2}}.$$

$$\therefore\frac{\left|CD\right|^2}{\left|AB\right|}=\frac{48\left(1+k^2\right)}{3+4k^2}\cdot\frac{3+4k^2}{12\left(1+k^2\right)}=4.$$

综合（1）（2），$\dfrac{\left|CD\right|^2}{\left|AB\right|}=4$为定值.