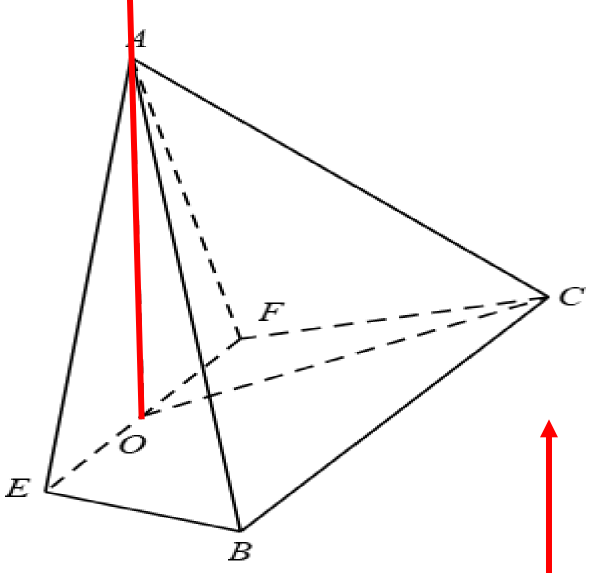
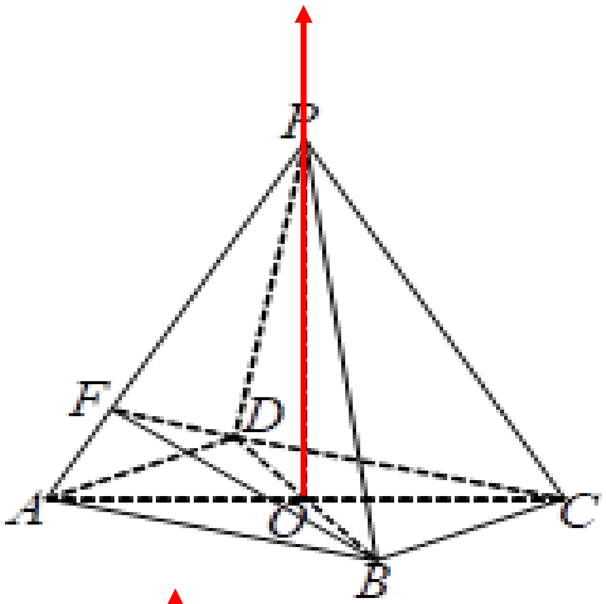
朝阳区线上课堂·高三年级数学

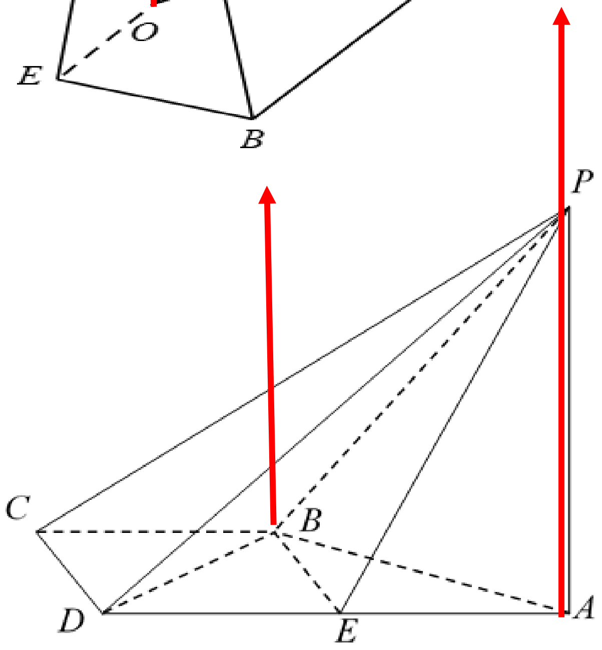
# 如何建立恰当的坐标系求解立体几何问题

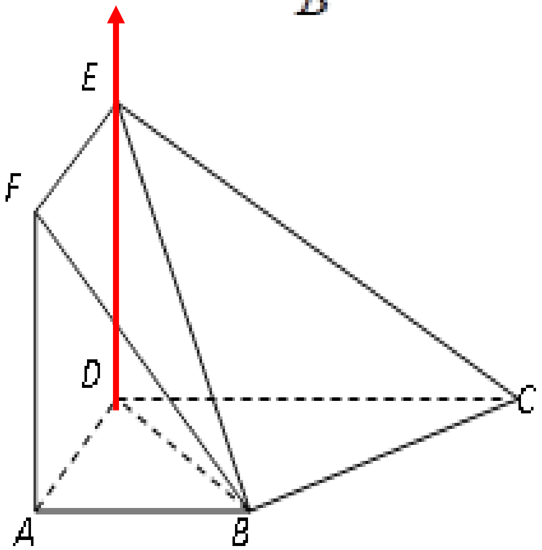
北京市日坛中学　石彩霞

# 一．常见结构

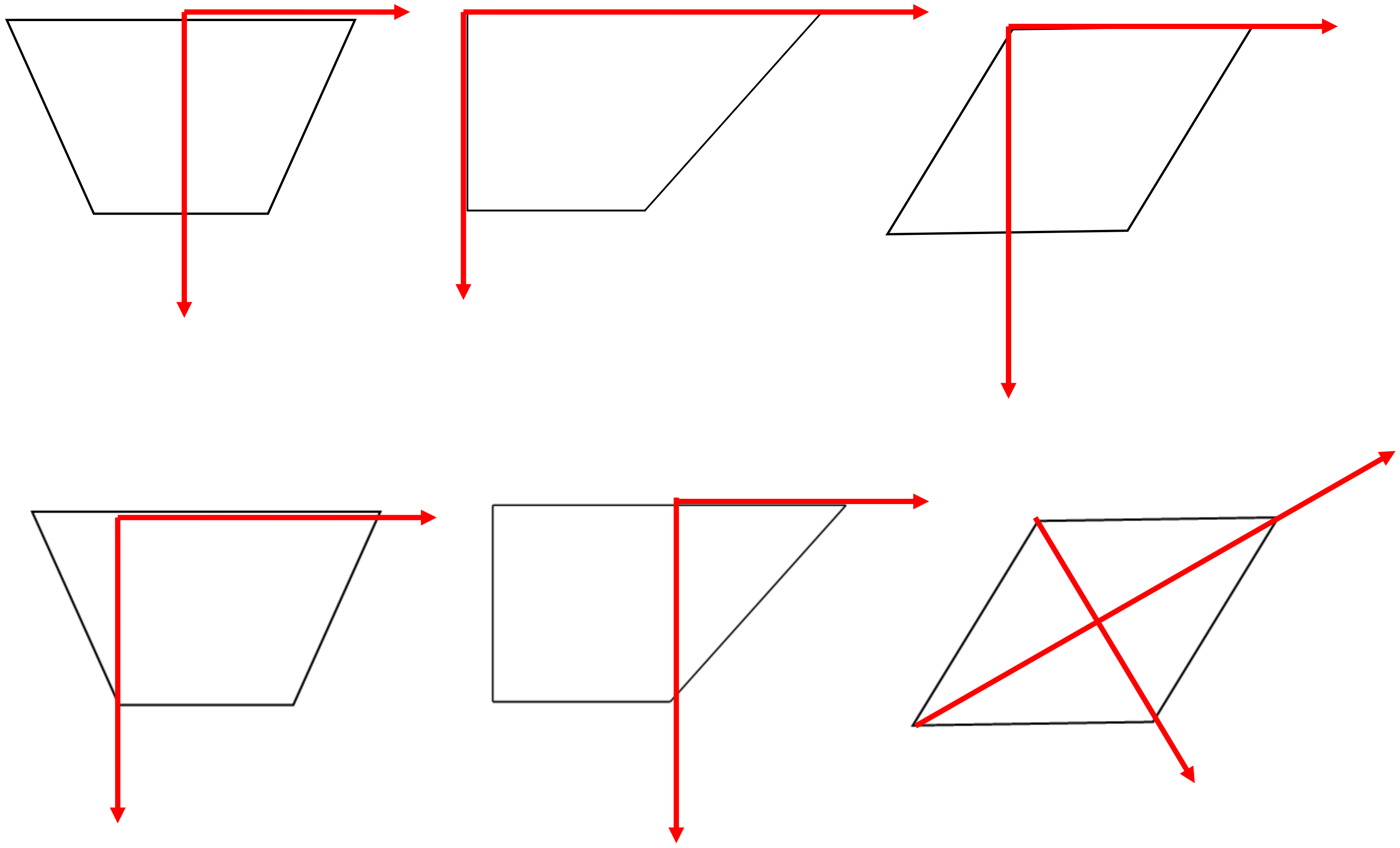


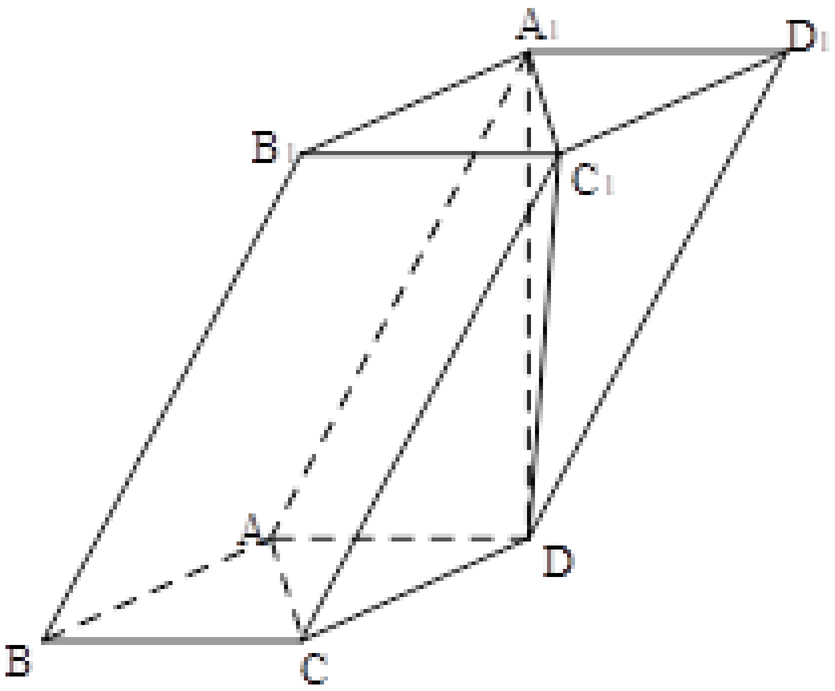
原则：
空间几何体中尽可能多的顶点落在坐标轴或者坐标面上

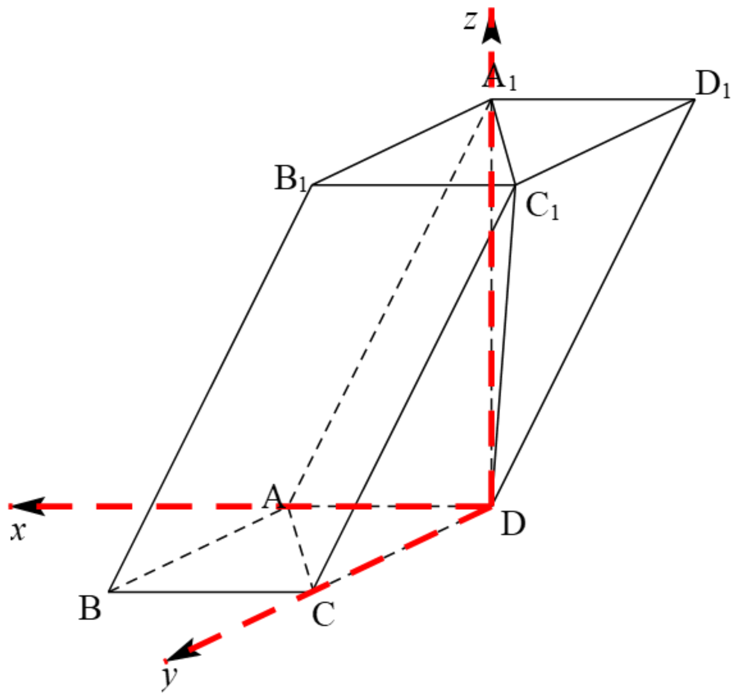


## 二．难点分解（建系，求点）

1．如图，已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1D\perp$底面 $ABCD$，

底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，侧棱 $AA_1=2$，求点 $D_1,C_1$ 的坐标.






解：因为 $A_1D\perp$ 底面 $ABCD$，

所以 $A_1D\perp AD$， $A_1D\perp CD$ .

又因为底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，

所以 $CD\perp AD$ .

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$ . 由题意得， $D(0,0,0)$， $C(0,1,0)$， $A_1(0,0,\sqrt{3})$ .

由于点 $D_1$ 位于 $xOz$ 平面内，易知其坐标为 $D_1\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$；

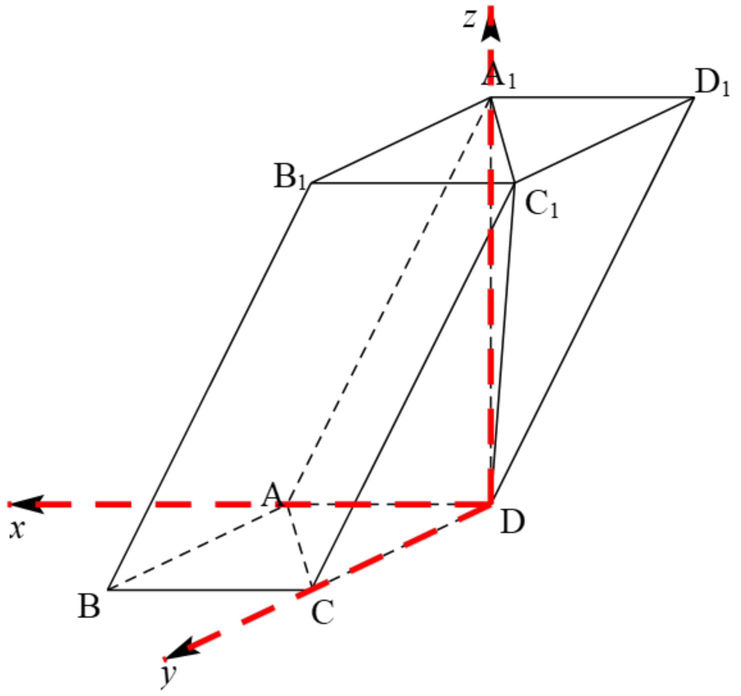
（法 1）发现点 $C_1$ 在 $xOy$ 面内的投影点与点 $B$ 关于 $y$ 轴对称，

而点 $C_1$ 的竖坐标与点 $A_1$ 的竖坐标相同，所以 $C_1\left(-1,1,\sqrt{3}\right)$；

（法 2）由于点 $D,C,D_1$ 均易知，也可以通过 $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{DD_1}$ 得出

$C_1$ 的坐标，步骤如下：

设 $C_1(a,b,c)$，由 $(a,b-1,c)=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$，得 $C_1\left(-1,1,\sqrt{3}\right)$.

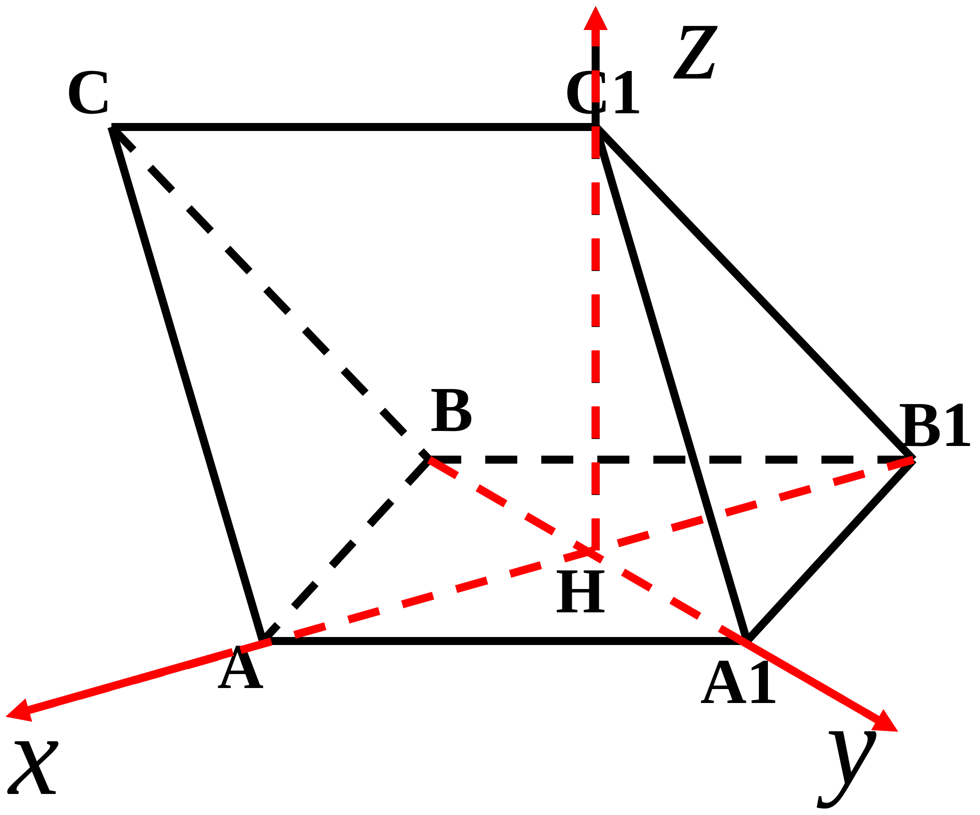


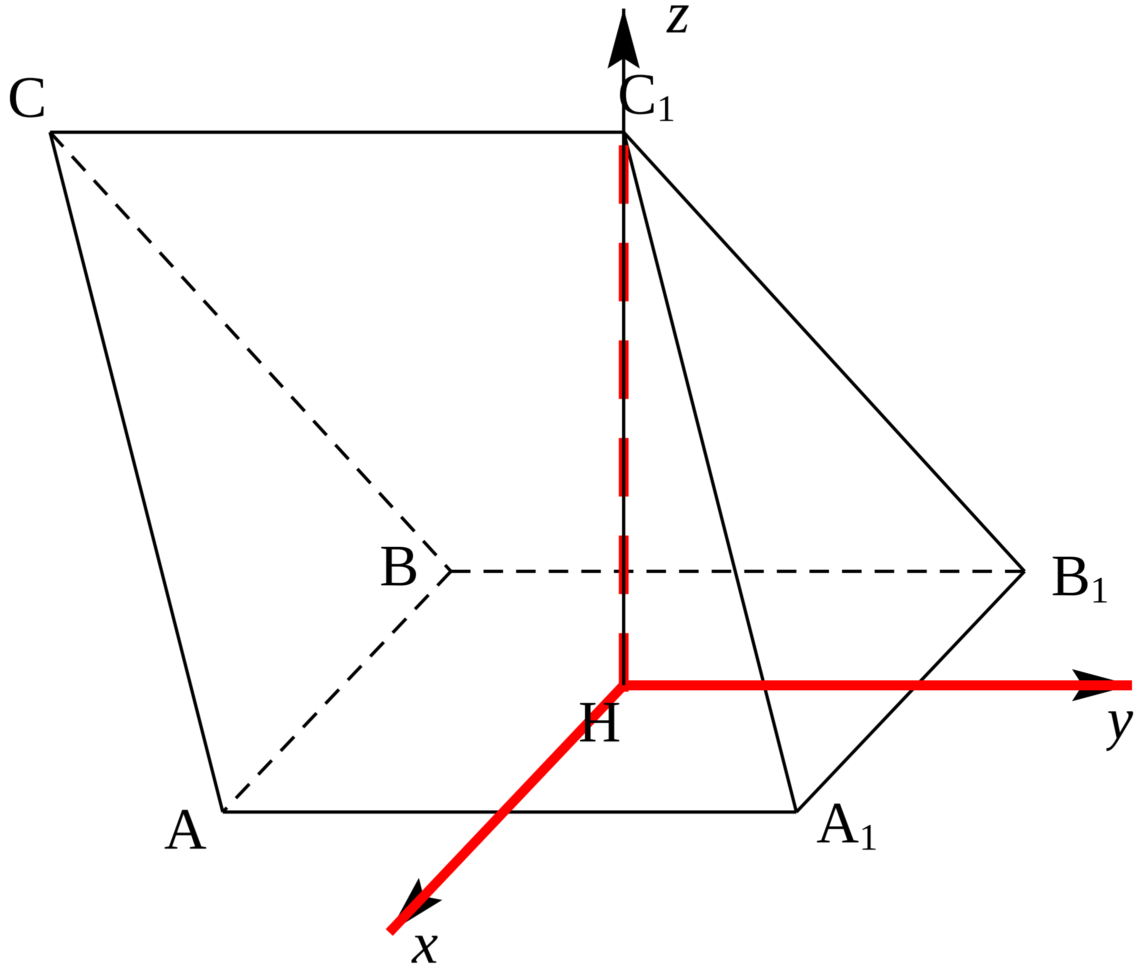

## 点坐标的确定方法：

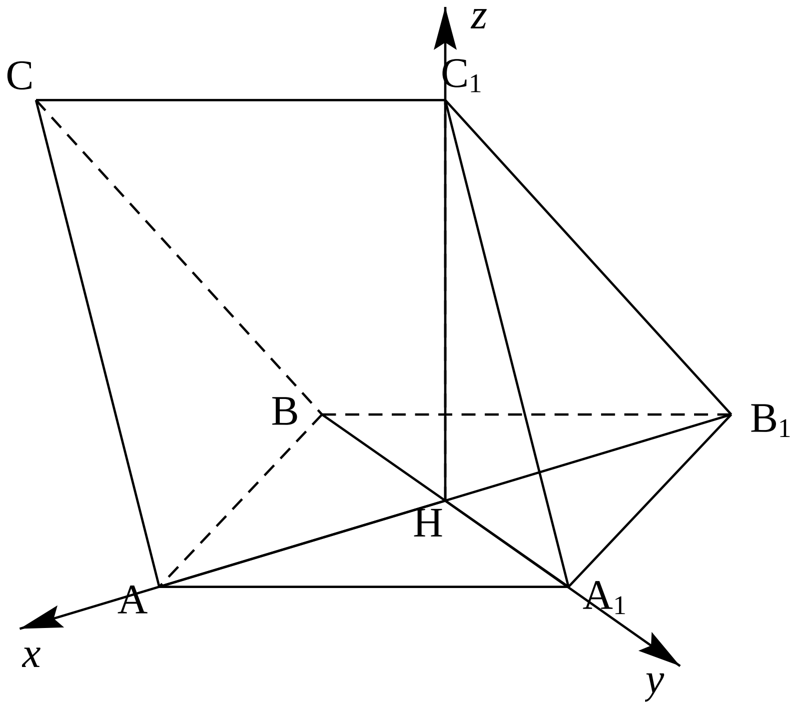
1.投影法　　　2.间接法（相等或共线向量）

2．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$H$ 是正方形 $AA_1B_1B$ 的中心，$AA_1=2\sqrt{2}$，$C_1H\perp$ 平面 $AA_1B_1B$，且 $C_1H=\sqrt{5}$.

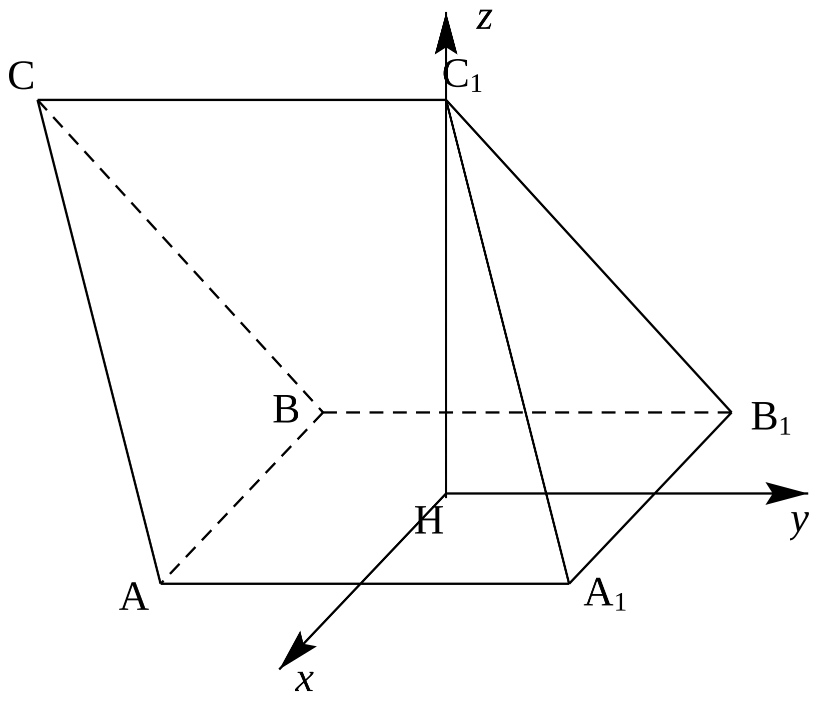
求点 C 的坐标.




z
C
$C_1$
B
$B_1$
H
y
A
$A_1$
x



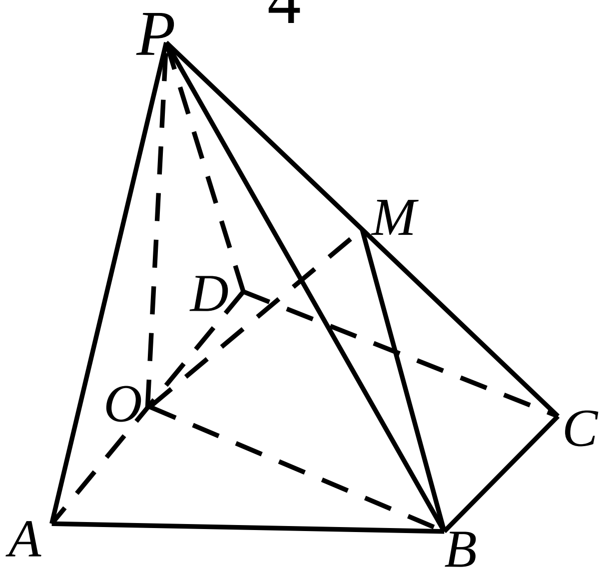
z
C
$C_1$
B
$B_1$
H
A
$A_1$
x
y

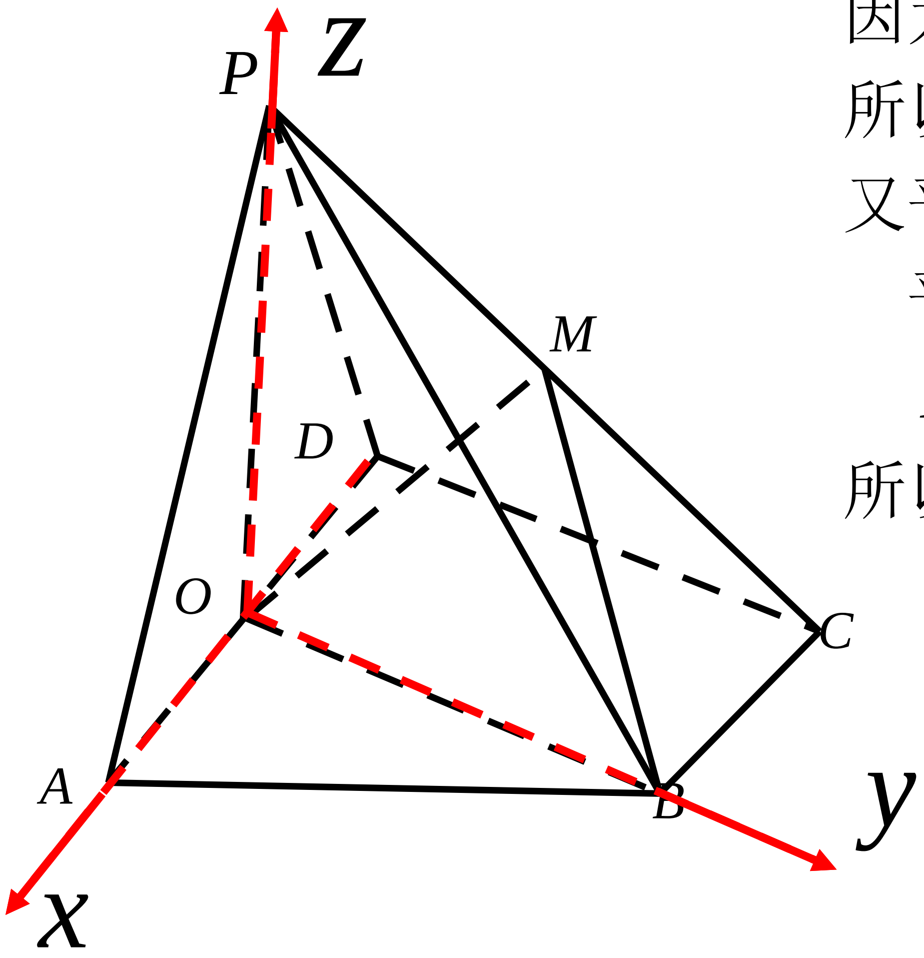
z
C
$C_1$
B
$B_1$
H
y
A
$A_1$
x

## 三．典例分析

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为直角梯形，$AD//BC$，$\angle ADC$=90°，平面$PAD\perp$底面$ABCD$，$O$为$AD$的中点，$M$是棱$PC$上的点，$PA=PD$，$BC=\dfrac{1}{2}AD=1$，$CD=\sqrt{3}$异面直线$AP$与$BD$所成角的余弦值为$\dfrac{1}{4}$，设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$



## （1）根据条件建立适当的坐标系（证明）




因为 $PA=PD$， $O$ 为 $AD$ 的中点，

所以 $PO\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$，

$PO\subset$面 $PAD$

所以 $PO\perp$面 $ABCD$

因为 $BC=\frac{1}{2}AD=OD$， $AD//BC$

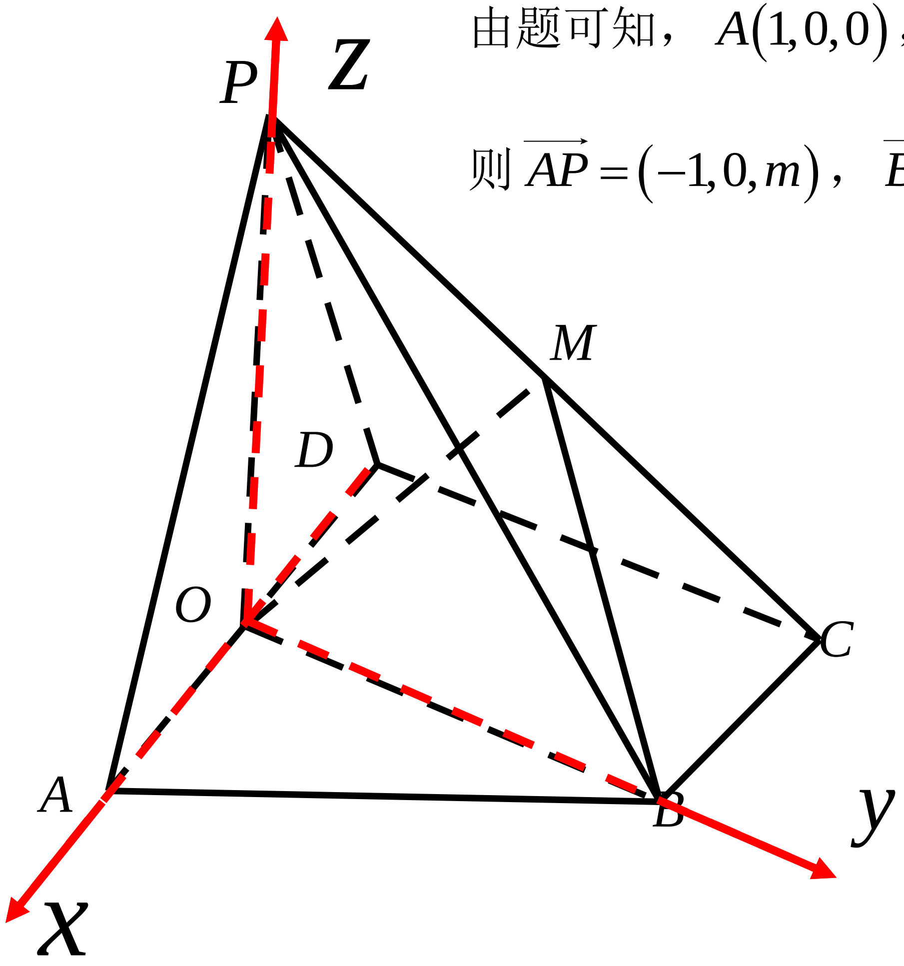
所以四边形 $ODCB$ 为平行四边形.

又 $\angle ADC=90^{\circ}$，

所以四边形 $ODCB$ 为矩形，

即 $BO\perp AD$.

## （2）求点 $P$， $M$ 的坐标（ $M$ 的坐标用 $\lambda$ 表示）




由题可知，$A(1,0,0)$，$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$D(-1,0,0)$，设点 $P(0,0,m)$，

则 $\overrightarrow{AP}=(-1,0,m)$，$\overrightarrow{BD}=\left(-1,-\sqrt{3},0\right)$

由异面直线 $AP$ 与 $BD$ 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$，得 $\left|\cos\left\langle \overrightarrow{AP},\overrightarrow{BD}\right\rangle\right|=\frac{1}{2\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{4}$，

所以 $m=\sqrt{3}$，即 $P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$.

易知 $C\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，设 $M\left(a,b,c\right)$，则 $\overrightarrow{PM}=\left(a,b,c-\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{PC}=\left(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，因为 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，

所以 $\left(a,b,c-\sqrt{3}\right)=\lambda\left(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，所以 $M\left(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$.

## 课堂小结：

向量法解决立体几何问题最关键的是建立恰当的空间直角坐标系，快速准确写出相关点的坐标

（1）关于建系

认识空间几何体的结构，尤其底面图形的特征，以及题干中给出的线面或者面面的垂直关系，建立空间直角坐标系；（右手系；证明三垂直）

（2）关于点的坐标

如果借助投影法难以确定点的坐标时，可以借助相关点构成的向量，利用两个向量相等或共线的性质解决其坐标.

利用向量共线解决动点坐标是解决立体几何问题中是很关键的一步，需要进一步熟悉运算通法.

# 谢谢您的观看

北 京 市 朝 阳 区 教 育 研 究 中 心　　制 作