

如何建立恰当的坐标系求解立体几何问题

【学习目标】

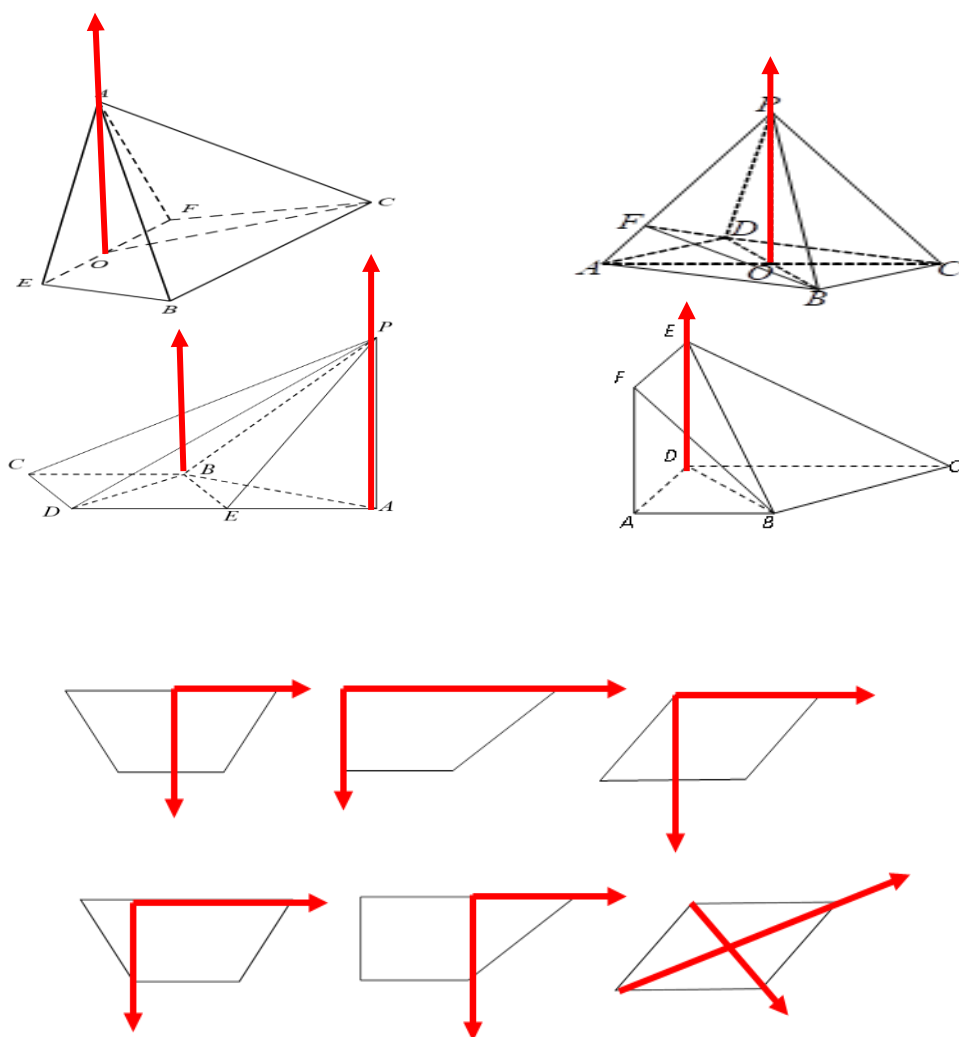
- 1.能够快速准确建立空间直角坐标系；
- 2.会借助向量性质解决空间相关点的坐标.

【学法指导】

- 1.准确认识空间几何体的结构，尤其底面的特征，以及题干中线面或者面面的位置关系，快速准确定位 x, y, z 轴从而建立空间直角坐标系；
- 2.能够借助两个向量相等或共线的性质解决空间相关点的坐标.

【教学过程】

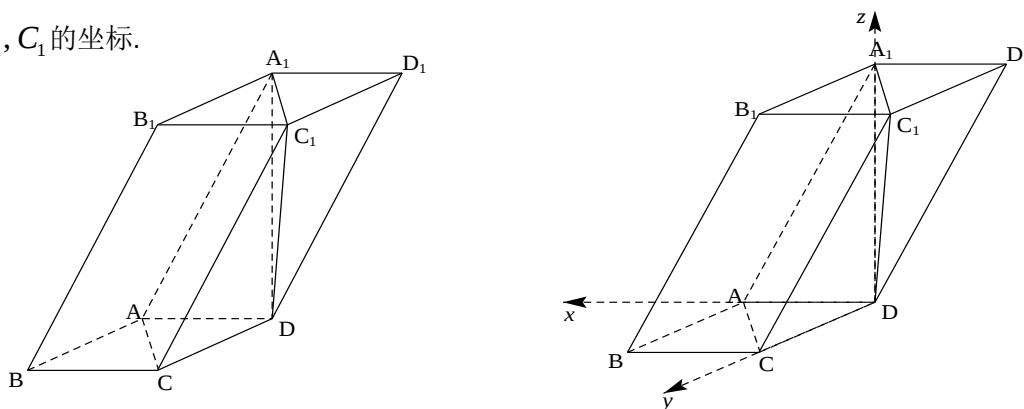
一. 常见结构



二. 难点分解: (建系, 求点)

1. 如图, 已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1D \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形, 侧棱 $AA_1 = 2$,

求: 点 D_1, C_1 的坐标.



(1) 提取关键信息: ①底面 $ABCD$ 是正方形; ② $A_1D \perp$ 底面 $ABCD$.

因为 $A_1D \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $A_1D \perp AD$, $A_1D \perp CD$.

又因为底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形, 所以 $CD \perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 由题意得, $D(0,0,0)$, $C(0,1,0)$, $A_1(0,0,\sqrt{3})$.

由于点 D_1 位于 xOz 平面内, 易知其坐标为 $D_1(-1,0,\sqrt{3})$.

(2) 那么点 C_1 的坐标怎么找呢?

(法1) 发现点 C_1 在 xOy 面内的投影点与点 B 关于 y 轴对称, 而点 C_1 的竖坐标与点 A_1 的竖坐标相同,

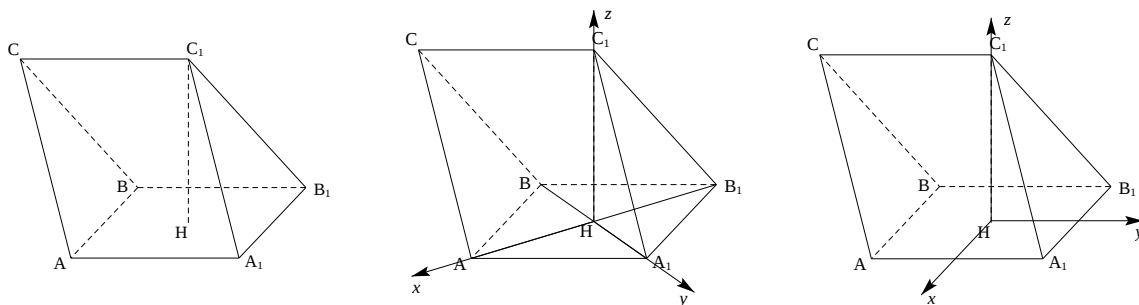
所以 $C_1(-1,1,\sqrt{3})$;

(法2) 由于点 D, C, D_1 均易知, 也可以通过 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$ 得出 C_1 的坐标, 步骤如下:

设 $C_1(a,b,c)$, 由 $(a,b-1,c) = (-1,0,\sqrt{3})$, 得 $C_1(-1,1,\sqrt{3})$.

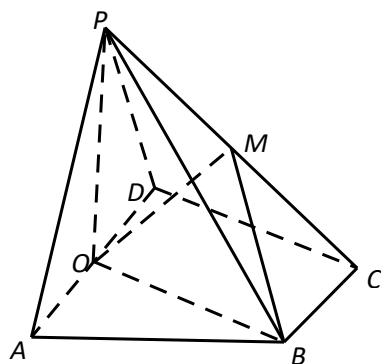
2. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, H 是正方形 AA_1B_1B 的中心, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, $C_1H \perp$ 平面 AA_1B_1B ,

且 $C_1H = \sqrt{5}$. 求点 C 的坐标.



三. 典例分析

例 1. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, O 为 AD 的中点, M 是棱 PC 上的点, $PA = PD$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$, $CD = \sqrt{3}$ 异面直线 AP 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$, 设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$



(1) 根据条件建立适当的坐标系 (证明)

因为 $PA = PD$, O 为 AD 的中点, 所以 $PO \perp AD$.

又平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$, $PO \subset$ 面 PAD ,

所以 $PO \perp$ 面 $ABCD$.

因为 $BC = \frac{1}{2}AD = OD$, $AD \parallel BC$, 所以四边形 $ODCB$ 为平行四边形.

又 $\angle ADC = 90^\circ$, 所以四边形 $ODCB$ 为矩形, 即 $BO \perp AD$.

(2) 求点 P , M 的坐标 (M 的坐标用 λ 表示)

由题可知, $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $D(-1,0,0)$, 设点 $P(0,0,m)$,

则 $\overrightarrow{AP} = (-1,0,m)$, $\overrightarrow{BD} = (-1,-\sqrt{3},0)$

由异面直线 AP 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$,

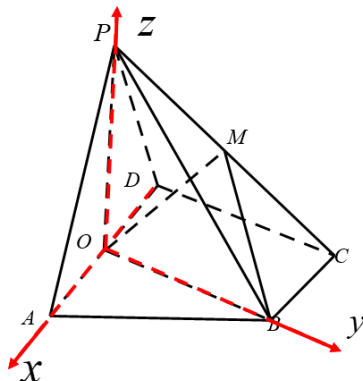
$$\left| \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BD} \rangle \right| = \frac{1}{2\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{4},$$

所以 $m = \sqrt{3}$, 即 $P(0,0,\sqrt{3})$.

易知 $C(-1,\sqrt{3},0)$, 设 $M(a,b,c)$, 则 $\overrightarrow{PM} = (a,b,c-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PC} = (-1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

因为 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC}$, 所以 $(a,b,c-\sqrt{3}) = \lambda(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

所以 $M(-\lambda, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.



四. 课堂小结

向量法解决立体几何问题最关键的是建立恰当的空间直角坐标系, 快速准确写出相关点的坐标.

(1) 关于建系

认识空间几何体的结构, 尤其底面图形的特征, 以及题干中给出的线面或者面面的垂直关系, 建立空间直角坐标系; (右手系; 证明三垂直)

(2) 关于点的坐标

遇到难以确定的点的坐标时, 可以借助相关点构成的向量, 利用两个向量相等或共线的性质解决其坐标. 在解决立体几何探究性问题时, 利用向量共线解决动点坐标是很关键的一步.