

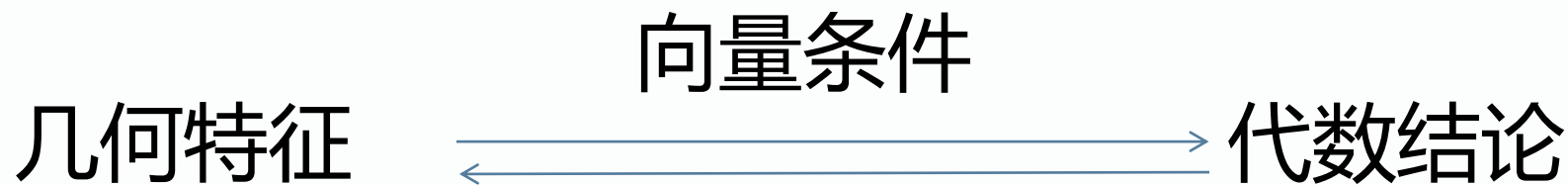


朝阳区线上课堂·高三年级数学

向量法解决解析几何问题

北京工业大学附属中学 王欣

向量法解决解析几何问题



向量法解决解析几何问题

【学习目标】

1. 复习巩固直线与椭圆位置关系的基本判断方法；
2. 借助向量工具，发现问题中所呈现的几何特征，并通过坐标运算实现几何特征的代数转化；
3. 体会向量在实现数学图形语言向符号语言转换过程中的工具性作用；进一步建立数形结合的思想.

向量法解决解析几何问题

【预备知识】

- 1.向量的相关概念和结论.
- 2.直线与圆锥曲线位置关系的基本判断方法.

向量法解决解析几何问题

【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为

$k (k \neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，

(1) 若 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ，求证 OM 与 l 的斜率之积为定值；

(2) 若 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AB}|$ ，求 k 的值；

(3) 以 AB 为直径的圆过原点 O ，求 k 的值；

(4) 椭圆上是否存在点 P ，使四边形 $PAOB$ 为平行四边形？

若 $|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{BF_1}|$ ，求 k 的值.

几何特征是什么呢？

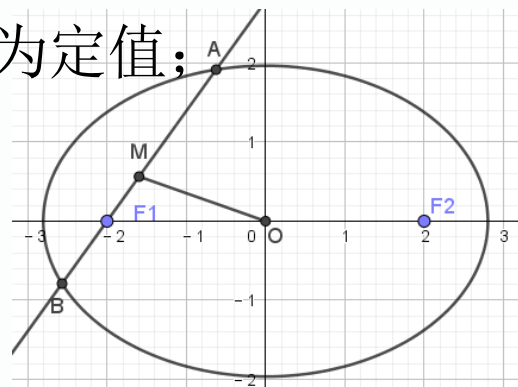
向量法解决解析几何问题

【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为

$k (k \neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，

(1) 若 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ，求证 OM 与 l 的斜率之积为定值；

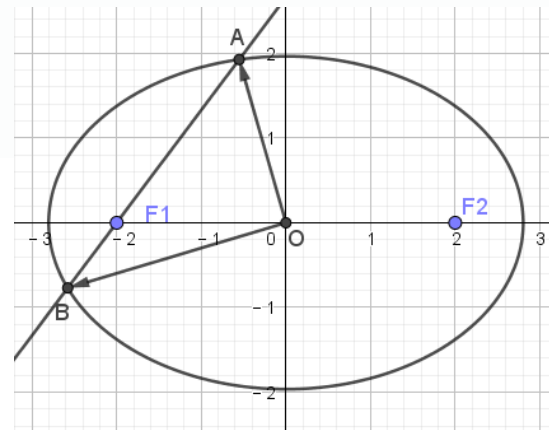
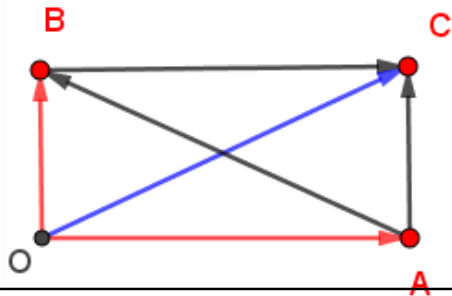
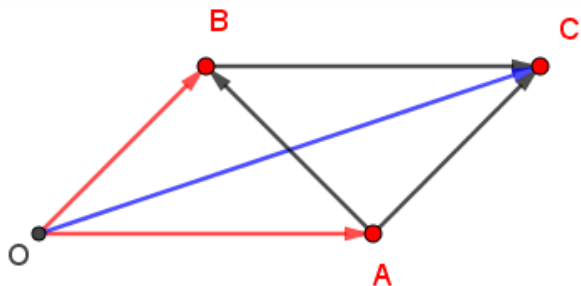
$$k_{OM} \cdot k_l = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{1}{2}$$



	向量条件	几何特征	代数结论
(1)	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$	M 为线段 AB 中点	$k_{OM} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$

向量法解决解析几何问题

【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，
 (2) 若 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{AB}|$ ，求 k 的值；



	向量条件	几何特征	代数结论
(2)	$ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} $	$OA \perp OB$	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

向量法解决解析几何问题

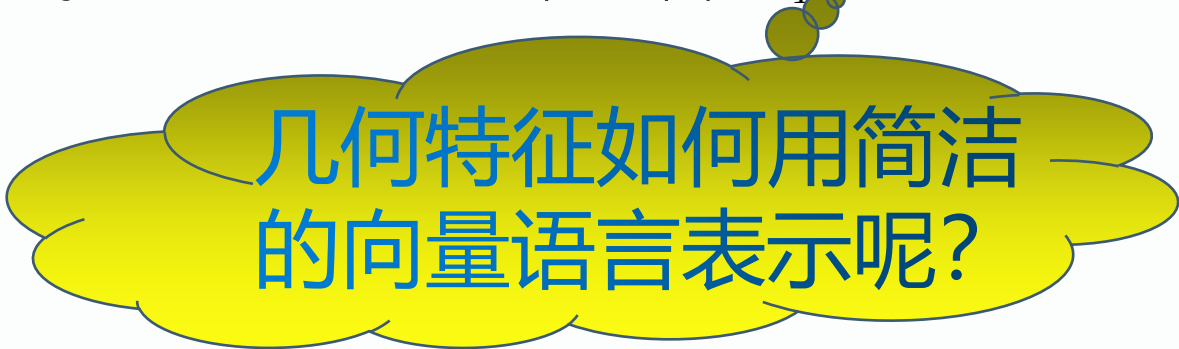
【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为

$k(k \neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，

(3) 以 AB 为直径的圆过原点 O ，求 k 的值；

(4) 椭圆上是否存在一点 P ，使四边形 $PAOB$ 为平行四边形？

(5) 直线 l 与 y 轴交于 N 点，若 $|AN| = |BF_1|$ ，求 k 的值。

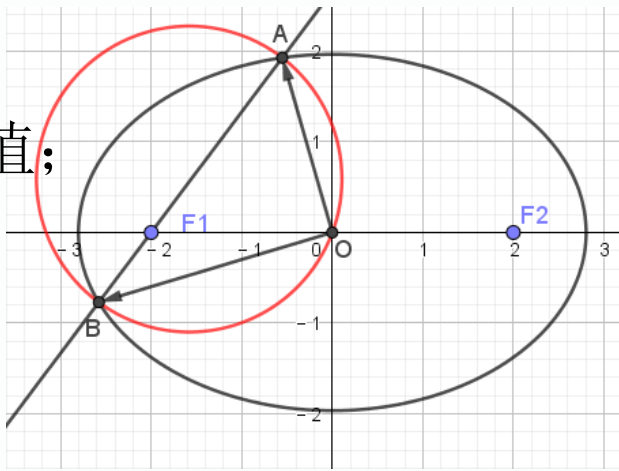


几何特征如何用简洁
的向量语言表示呢？

向量法解决解析几何问题

【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，
(3) 以 AB 为直径的圆过原点 O ，求 k 的值；

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{8k^2 - 8}{1 + 2k^2} + \frac{-4k^2}{1 + 2k^2} = \frac{4k^2 - 8}{1 + 2k^2} = 0$$



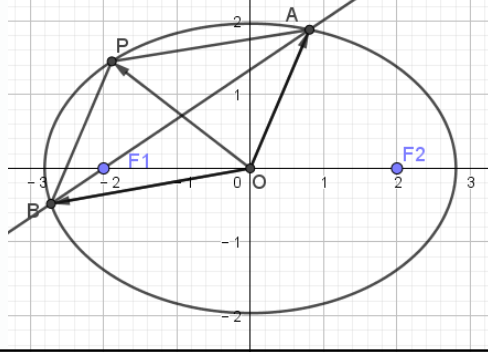
	向量条件	几何特征	代数结论
(3)	$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$	以 AB 为直径的圆过点 O	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为

$k(k \neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点,

(4)椭圆上是否存在一点 P , 使四边形 $PAOB$ 为平行四边形?

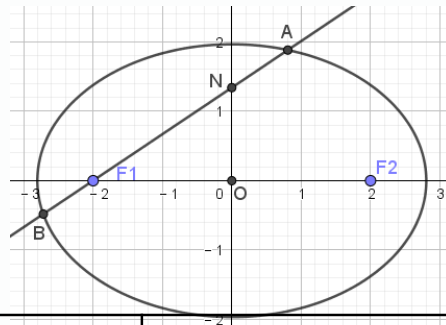
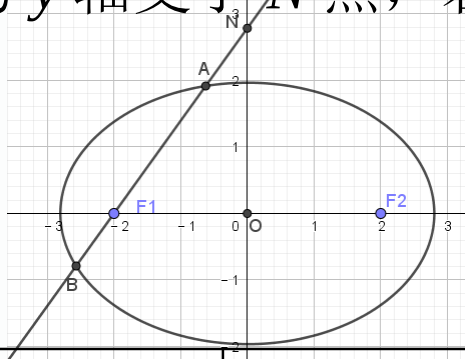
$$P(\frac{-8k^2}{1+2k^2}, \frac{4k}{1+2k^2}) \quad k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



	向量条件	几何特征	代数结论
(4)	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB}$	四边形 $PAOB$ 为平行四边形	$P(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 满足椭圆方程

向量法解决解析几何问题

【典型例题】已知椭圆： $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，过左焦点 F_1 做斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l 交椭圆于 A 、 B 两点，
 (5) 直线 l 与 y 轴交于 N 点，若 $|AN| = |BF_1|$ ，求 k 的值。



	向量条件	几何特征	代数结论
(5)	$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BF_1}$ 或 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{F_1B}$	A、B、F_1、N 共线 且 $ AN = BF_1 $	$x_1 - x_2 = 2$ 或 $x_1 + x_2 = -2$

向量法解决解析几何问题

$$x_1 + x_2 = -2$$

$$\frac{-8k^2}{1+2k^2} = -2$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

$$\left(\frac{-8k^2}{1+2k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8k^2 - 8}{1+2k^2} = 4$$

	向量条件	几何特征	代数结论
(1)	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$	M 为线段 AB 中点	$k_{OM} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$
(2)	$ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} $	$OA \perp OB$	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
(3)	$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$	以 AB 为直径的圆过点 O	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$
(4)	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OB}$	四边形 $PAOB$ 为平行四边形	$P(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 满足椭圆方程
(5)	$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BF_1}$ 或 $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{F_1B}$	A, B, F_1, N 共线且 $ AN = BF_1 $	$x_1 + x_2 = -2$ 或 $x_1 - x_2 = -2$

向量法解决解析几何问题

练习:

设椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 过 $M(1,0)$ 作直线 l 与椭圆交于 A 、 B 两点,
与 y 轴交于 N 点

(1) 若 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, 求直线 l 的方程;

(2) 若 $|AM| = |BN|$, 求直线 l 的方程.



	向量条件	几何特征	代数结论
(1)	$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$	M 为 AB 上靠近 B 一侧的三等分点	$x_1 + 2x_2 = 3$

向量法解决解析几何问题

$$x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 4}{1+4k^2} \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

$$(3 - 2x_2) + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2} \quad x_2 = \frac{3+4k^2}{1+4k^2}$$

$$(3 - 2x_2) \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 4}{1+4k^2} \quad \left(3 - \frac{6+8k^2}{1+4k^2}\right) \cdot \frac{3+4k^2}{1+4k^2} = \frac{4k^2 - 4}{1+4k^2}$$

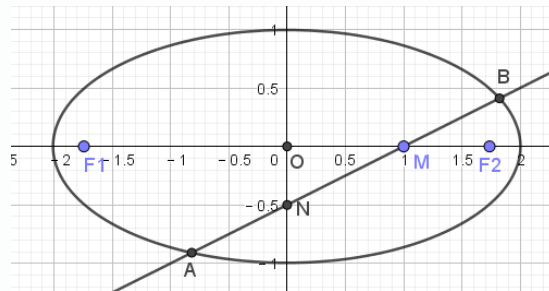
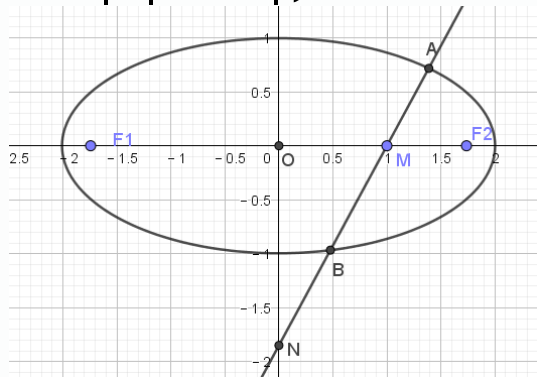
$$\text{解得: } k^2 = \frac{5}{12} \quad k = \pm \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$\text{直线 } l: y = \pm \frac{\sqrt{15}}{6}(x-1)$$

向量法解决解析几何问题

练习：设椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，过 $M(1,0)$ 作直线 l 与椭圆交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于 N 点

(2) 若 $|AM| = |BN|$ ，求直线 l 的方程。



答对了吗？



	向量条件	几何特征	代数结论
(2)	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ 或 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB}$	A 、 M 、 B 、 N 四点共线且 $ AM = BN $	$x_1 + x_2 = 1$ 或 $x_1 - x_2 = 1$

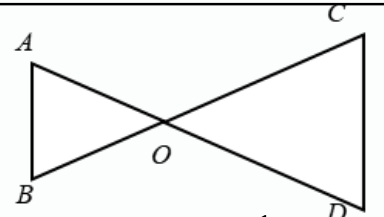
向量法解决解析几何问题

【课堂小结】

向量条件	几何关系
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	M 为线段 AB 中点
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$	点 O 在以 AB 为直径的圆上 (或 $\angle AOB$ 为直角)
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$ 且 $\overrightarrow{OA} \neq \lambda \overrightarrow{OB}$	点 O 在以 AB 为直径的圆内 (或 $\angle AOB$ 为钝角)
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$ 且 $\overrightarrow{OA} \neq \lambda \overrightarrow{OB}$	点 O 在以 AB 为直径的圆外 (或 $\angle AOB$ 为钝角)
$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$ 或 $ PA PB = \pm \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$	A 、 P 、 B 三点共线

【课堂小结】

向量法解决解析几何问题

向量条件	几何关系
$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$	已知 $PA=PB$ 的等腰 $\triangle APB$, 取 AB 的中点 Q , $ PA = PB $
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QB}$; 或 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$	四边形 $APBQ$ 是平行四边形
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ 且 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$; 或 $ \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} $	四边形 $APBQ$ 是矩形
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ 且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$;	四边形 $APBQ$ 是菱形
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$	 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} S_{\triangle COD}$

向量法解决解析几何问题

【本专题学法指导】

- 1、解决解析几何问题，一定要有图形的意识，数形结合，灵活地实现几何条件向代数结论的转换，即实现坐标化.
- 2、数学把现实生活中的量的关系、量的变化、形的特征抽象成为一个一个的数学模型，并把它们符号化。在理解解析几何问题时，我们可以充分利用向量这个工具来实现这种符号化。向量法在几何图形性质的表述上更加简洁和直接，向量兼具“数”和“形”的双重特点，借助向量在解决与共线、垂直、长度、角度等问题时，可以减少运算量，使得几何与代数的联系更加自然和紧密.



感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作