参考答案与学习建议

【任务一】

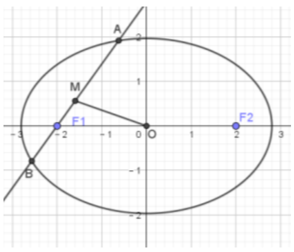
问题	向量条件	几何特征	代数结论
(1)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$	M 为线段 AB 中点	$k_{OM}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$
(2)(3)	$\lvert\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	点 O 在以 AB 为直径的圆上（或∠AOB 为直角）	$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$
(4)	$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}$	四边形 $PAOB$ 为平行四边形	$P(x_1+x_2,y_1+y_2)$ 满足椭圆方程
(5)	$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BF_1}$ 或 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{F_1B}$	A、B、F_1、N 共线且$\lvert AN\rvert=\lvert BF_1\rvert$	$x_1+x_2=-2$ 或 $x_1-x_2=2$

【任务二】 设直线 l：$y=k(x+2)$ $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}x^2+2y^2=8\\ y=k(x+2)\end{cases}$$

$$(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-8=0 \qquad x_1+x_2=\frac{-8k^2}{1+2k^2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{8k^2-8}{1+2k^2}$$

(1) M 为 AB 中点



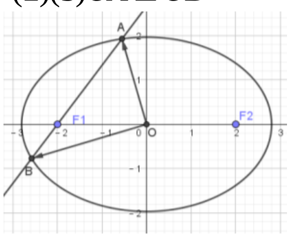
$$x_1^2+2y_1^2=8$$

$$x_2^2+2y_2^2=8$$

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$$

$$k_{OM}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} \qquad k_{OM}\cdot k_l=-\frac{1}{2}$$

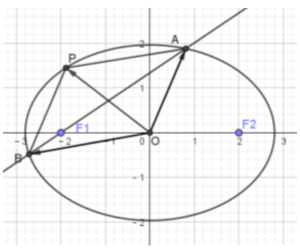
(2)(3)$OA\perp OB$



$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{8k^2-8}{1+2k^2}+\frac{-4k^2}{1+2k^2}=\frac{4k^2-8}{1+2k^2}=0$$

$$k^2=2,k=\pm\sqrt{2}$$

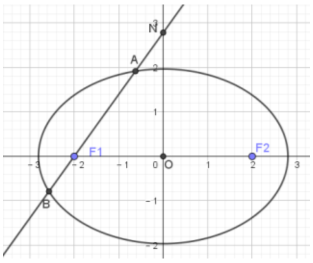
(4)$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ $\quad P(x_1+x_2,y_1+y_2)$ $\quad P(\dfrac{-8k^2}{1+2k^2},\dfrac{4k}{1+2k^2})$

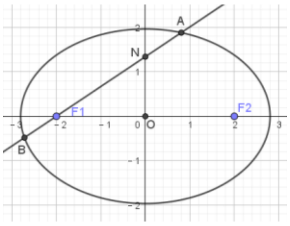


P 点坐标代入椭圆方程：$(\dfrac{-8k^2}{1+2k^2})^2+2(\dfrac{4k}{1+2k^2})^2=8$

$$k^4=\frac{1}{4},k^2=\frac{1}{2},k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BF_1}$ 或 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{F_1B}$





$N(0,2k)$ $\overrightarrow{AN}=(-x_1,2k-y_1),\overrightarrow{BF_1}=(-2-x_2,-y_2)$

$-x_1=-2-x_2$ 或 $-x_1=2+x_2$

$x_1-x_2=2$ $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4$ $x_1+x_2=-2$

$(\frac{-8k^2}{1+2k^2})^2-4\cdot\frac{8k^2-8}{1+2k^2}=4$ $\frac{-8k^2}{1+2k^2}=-2$

$k^2=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ $k^2=\frac{1}{2}$

$k=\pm\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$ $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

【任务三】

问题	向量条件	几何特征	代数结论
(1)	$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$	M 为 AB 上靠近 B 一侧的三等分点	$x_1+2x_2=3$
(2)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BN}$ 或 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NB}$	A、M、B、N 四点共线且 $\lvert AM\rvert=\lvert BN\rvert$	$x_1+x_2=1$ 或 $x_1-x_2=1$

设直线 l：$y=k(x-1)$ $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$

$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ y=k(x-1)\end{cases}$ $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$

(1) 方法一：用投影 $1-x_1=2(x_2-1)$

方法二：用向量 $\overrightarrow{AM}=(1-x_1,-y_1),\overrightarrow{MB}=(x_2-1,y_2)$ $1-x_1=2(x_2-1)$

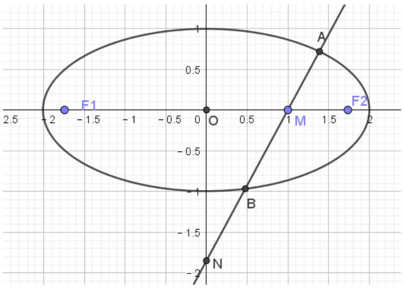
$x_1+2x_2=3$

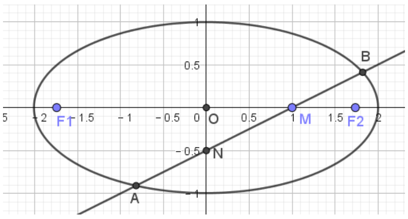
$$(3-2x_2)+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2} \qquad x_2=\frac{3+4k^2}{1+4k^2}$$

$$(3-2x_2)\cdot x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2} \qquad (3-\frac{6+8k^2}{1+4k^2})\cdot\frac{3+4k^2}{1+4k^2}=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$$ 解得：$k^2=\frac{5}{12}$ $\qquad k=\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$

直线 l：$y=\pm\frac{\sqrt{15}}{6}(x-1)$

(2)





方法一：用投影 $\qquad |1-x_1|=2|x_2| \qquad x_1+x_2=1$ 或 $x_1-x_2=1$

方法二：用向量 $\qquad \overrightarrow{AM}=(1-x_1,-y_1),\overrightarrow{BN}=(-x_2,y_N-y_2)$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BN}$ 或 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NB} \qquad x_1+x_2=1$ 或 $x_1-x_2=1$

$$\frac{8k^2}{1+4k^2}=1 \qquad k^2=\frac{1}{4} \qquad k=\pm\frac{1}{2}$$

或$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1 \qquad \frac{64k^4}{(1+4k^2)^2}-4\cdot\frac{4k^2-4}{1+4k^2}=1$ 解得：$k^2=\frac{5+2\sqrt{10}}{4}$

$$k=\pm\sqrt{\frac{5+2\sqrt{10}}{4}}$$

【任务四】参考学习任务单.