专题名称：向量法解决解析几何问题

【学习目标】

1. 复习巩固直线与椭圆位置关系的基本判断方法；
2. 借助向量工具，发现问题中所呈现的几何特征，并通过坐标运算实现几何特征的代数转化；
3. 体会向量在实现数学图形语言向符号语言转换过程中的工具性作用；进一步建立数形结合的思想.

【预备知识】

1. 向量的相关概念和结论.
2. 直线与圆锥曲线位置关系的基本判断方法.

【典型例题】已知椭圆：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，过左焦点 F_1 做斜率为 $k(k\neq 0)$的直线 l 交椭圆于 A、B 两点，

(1) 若 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，求证 OM 与 l 的斜率之积为定值；

(2) 若 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|$，求 k 的值；

(3) 以 AB 为直径的圆过原点 O，求 k 的值；

(4) 椭圆上是否存在一点 P，使四边形 $PAOB$ 为平行四边形？

(5) 直线 l 与 y 轴交于 N 点，若 $|AN|=|BF_1|$,求 k 的值.

思路分析：

解析几何首先是几何，因此我们在解决解析几何问题时，一定要充分利用图形，分析几何特征，尝试将这些几何特征转化为代数结论，实现坐标化。而我们学习过的向量，它本身就是一种符合化的语言，它既能反应图形的几何特征，其坐标表示又能方便进行代数运算，因此向量是解决解析几何问题过程中，实现用代数方法解决几何问题的重要工具.

【任务一】请同学们填写以下表格，将每一问所给的向量条件转化为几何特征，或者依据问题中的几何特征描述，写出该几何特征所对应的向量表达式，并最终用坐标表示.

问题	向量条件	几何特征	代数结论
(1)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$		
(2)	$\lvert\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\rvert=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$		
(3)		以 AB 为直径的圆过原点 O	
(4)		四边形 $PAOB$ 为平行四边形	
(5)		A、B、F_1、N 共线且$\lvert AN\rvert=\lvert BF_1\rvert$	

【任务二】根据任务一所分析出的代数转换结论，求解例题的每一问.

【任务三】尝试用例题中问题分析的方法，解决下面这个问题：

设椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，过 M（1,0）作直线 l 与椭圆交于 A、B 两点，与 y 轴交于 N 点

（1）若 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，求直线 l 的方程；

（2）若 $|AM|=|BN|$，求直线 l 的方程.

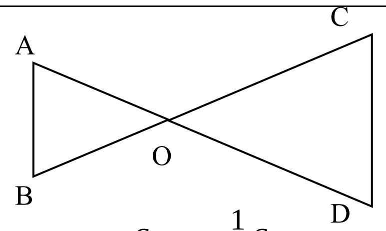
问题	向量条件	几何特征	代数转化结论
(1)	$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$		
(2)		A、M、B、N 四点共线且 $\lvert AM\rvert=\lvert BN\rvert$	

【任务四】请同学们尝试说出本专题的解题策略.

【小结提升】

转化是数学解题的一种重要思想。而实现转化，首先要先实现数学语言之间的转译。数学语言包括：文字语言、图形图表语言和符号语言。以解析几何为例，解析几何的核心是用代数方法来研究几何问题，在这一过程中，就要用到数学语言之间的转译，即把问题中的文字语言转译为图形语言，再把图形语言转译为符号语言，最终利用符号化的坐标（代数方法），完成几何问题的求解。向量是实现图形语言转化为符号语言的有利工具.

常见的一些几何条件的向量表达如下：

向量条件	几何关系
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$；$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}+\overrightarrow{\boldsymbol{OB}})$	M 为线段 AB 中点
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=0$	点 O 在以 AB 为直径的圆上 （或$\angle AOB$ 为直角）
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}>0$ 且 $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\neq\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$	点 O 在以 AB 为直径的圆内 （或$\angle AOB$ 为钝角）
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}<0$ 且 $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\neq\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$	点 O 在以 AB 为直径的圆外 （或$\angle AOB$ 为钝角）
$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$ 或 $\lvert PA\rvert\lvert PB\rvert=\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$	A、P、B 三点共线
$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=0$	已知 $PA=PB$ 的等腰 ΔAPB，取 AB 的中点 Q，$\lvert PA\rvert=\lvert PB\rvert$
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QB}$；或 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$	四边形 $APBQ$ 是平行四边形
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$ 且 $\overrightarrow{\boldsymbol{AQ}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}=0$；或 $\lvert\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\rvert=\lvert\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}\rvert$	四边形 $APBQ$ 是矩形
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}$ 且 $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}=0$；	四边形 $APBQ$ 是菱形
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$	 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}S_{\Delta COD}$

【本专题学法指导】

1、解决解析几何问题，一定要有图形的意识，数形结合，灵活地实现几何条件向代数结论的转换，即实现坐标化.

2、数学把现实生活中的量的关系、量的变化、形的特征抽象成为一个一个的数学模型，并把它们符号化。在处理解析几何问题时，我们可以充分利用向量这个工具来实现这种符号化。向量法在几何图形性质的表述上更加简洁和直接，向量兼具“数”和“形”的双重特点，借助向量在解决与共线、垂直、长度、角度等问题时，可以减少运算量，使得几何与代数的联系更加自然和紧密.