



朝阳区线上课堂·高三年级数学

解析几何中的定点问题

北京工业大学附属中学 谷红霞



【学习目标】

以解析几何中直线过定点问题为载体，借助图形，明确运算对象、探索运算思路、设计运算程序、实施运算，提升借助代数运算解决几何问题的能力。



【基础知识】

1. 确定含参直线过定点的方法;
2. 过两点的直线的斜率公式;
3. 直线与椭圆相交这种位置关系的代数表示.

题目1

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

题目2

解析几何中的定点问题

难点?

已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(I) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(II) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M , N , 直线 $y = -1$ 分别交直线 OM , ON 于点 A 和点 B . 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

1. 请你尝试完成下面的问题:

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

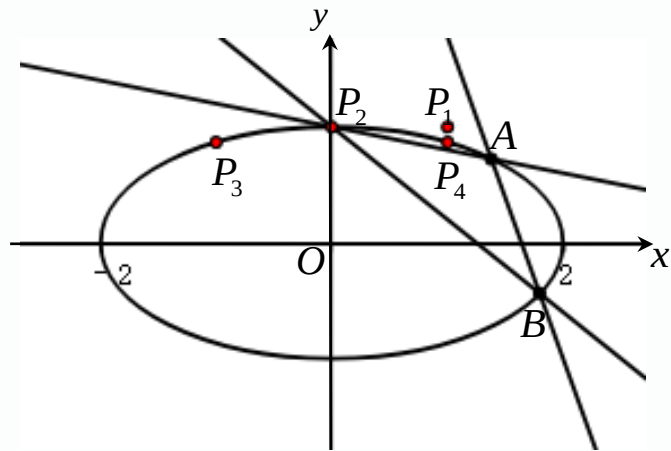
(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.



$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

思考

2. 结合你的解决思路, 进一步思考下面的问题:

(1) 条件“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”如何表示? 直线 l 如何表示?

(2) 结合上面的表示, 你打算设“谁”?

(3) 每种方法的运算难点在哪? 如何突破?

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

运算基于表示

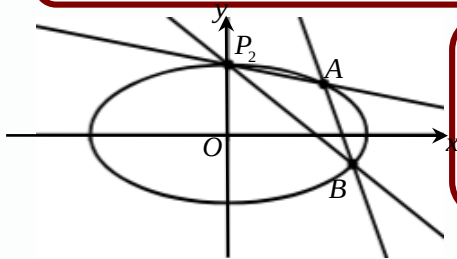
思考

(1) 条件“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”如何表示? 直线 l 如何表示?

$$k_{P_2A} + k_{P_2B} = -1$$

$$l: y - n = k(x - m) (n - km \neq 1)$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = -1 \quad l: y = kx + m (m \neq 1) \quad \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$



$$k_1 + k_2 = -1$$

$$\begin{cases} y = k_1x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$A\left(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}\right)$$

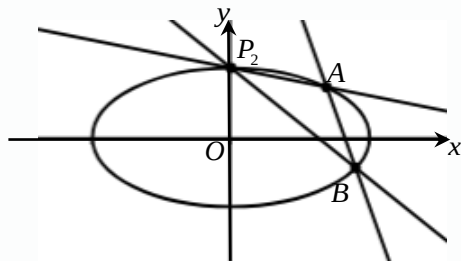
$$B\left(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}\right)$$

$$l: y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} \left(x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2} \right)$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2}$$

$$l: y = kx + m (m \neq 1)$$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$



思路 1——直线 l 可以通过斜截式来表示

① 当斜率存在时, 设 $l: y = kx + m$ ($m \neq 1$)

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 整理得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}$$

$$\text{则 } k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{x_2(kx_1 + m) - x_2 + x_1(kx_2 + m) - x_1}{x_1x_2} = -1,$$

$$\text{所以 } x_2(kx_1 + m) - x_2 + x_1(kx_2 + m) - x_1 = -x_1x_2$$

$$2kx_1x_2 - (x_1 + x_2) + m(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0$$

$$\text{将 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} \text{ 代入上式, 可得}$$

$$2k \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} - \frac{-8km}{1 + 4k^2} + m \frac{-8km}{1 + 4k^2} + \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2} = 0$$

$$8km^2 - 8k + 8km - 8km^2 + 4m^2 - 4 = 0$$

$$2k - 2km - m^2 + 1 = 0$$

$$2k(1 - m) + m^2 - 1 = 0$$

$$(2k + m + 1)(1 - m) = 0$$

$$\text{又 } m \neq 1$$

$$m = -2k - 1, \text{ 此时 } \Delta = -4k, \text{ 存在 } k < 0 \text{ 使得 } \Delta > 0 \text{ 成立.}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx - 2k - 1, y + 1 = k(x - 2)$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = -1$$

$$\text{所以 } l \text{ 过点 } (2, -1).$$

② 当斜率不存在时, 设 $l: x = t, A(t, y_A), B(t, -y_A)$

$$k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_A - 1}{t} + \frac{-y_A - 1}{t} = \frac{-2}{t} = -1$$

$$\text{得 } t = 2, \text{ 此时 } l \text{ 过椭圆右顶点, 不存在两个交点, 故不满足.}$$

$$\text{综上, 直线 } l \text{ 过定点 } (2, -1).$$

$$k_1 + k_2 = -1 \quad \begin{cases} y = k_1 x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}) \\ B(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}) \end{matrix}$$

$$y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2-1} (x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2})$$

思路2——直线 l 可以通过表示 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两个点来表示；
如何能将两个点的坐标表示呢？可以借助直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率，
设直线 P_2A 的斜率为 k_1 ，直线 P_2B 的斜率为 k_2 ，

直线 P_2A 方程为 $y = k_1 x + 1$

联立 $\begin{cases} y = k_1 x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ ，整理得 $(1+4k_1^2)x^2 + 8k_1x = 0$

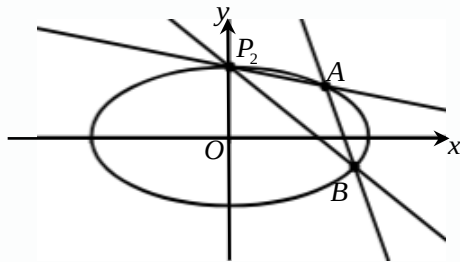
可得 $A(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2})$

同理可得 $B(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2})$

根据两点所在直线的斜率公式可得直线 l 的斜率为 $k = \frac{1}{4k_1k_2-1}$ 。

接下来，便可以得到直线 l 的方程：

$$y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2-1} (x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2})$$



$$\frac{y+1}{1+4k_1^2} - \frac{2}{4k_1k_2-1} = \frac{1}{4k_1k_2-1} x - \frac{1}{4k_1k_2-1} \cdot \frac{-8k_1}{1+4k_1^2}$$

$$y+1 = \frac{1}{4k_1k_2-1} x + \frac{8k_1(1+k_2)-2}{(4k_1k_2-1)(1+4k_1^2)} \quad \text{又 } k_1+k_2=-1$$

$$\text{所以 } y+1 = \frac{1}{4k_1k_2-1} x + \frac{-2}{(4k_1k_2-1)}$$

$$y+1 = \frac{1}{4k_1k_2-1} (x-2)$$

故直线 l 过定点 $(2, -1)$ 。

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

思考

(1) 条件“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”如何表示? 直线 l 如何表示?

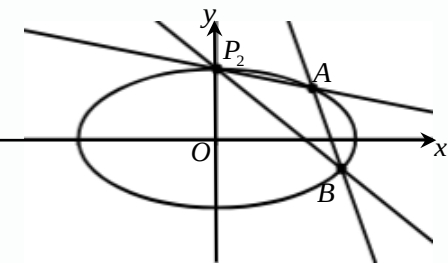
$$k_{P_2A} + k_{P_2B} = -1$$

$$l: y - n = k(x - m) (n - km \neq 1)$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = -1$$

$$l: y = kx + m (m \neq 1)$$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$



$$k_1 + k_2 = -1 \quad \begin{cases} y = k_1x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$A\left(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}\right)$$

$$B\left(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}\right)$$

$$y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} \left(x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2} \right)$$

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

思考

3. 思考, 在这样的问题中如果结论成立, 也就是直线过定点, 那么我们能不能猜出这个定点?

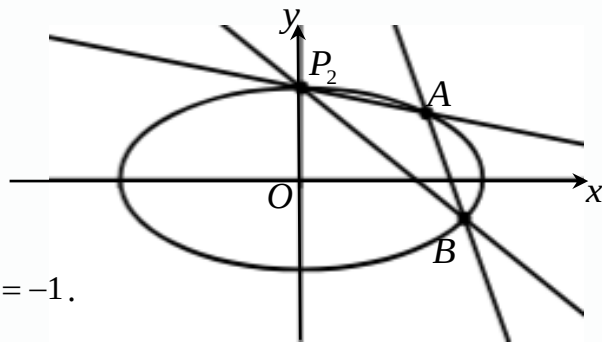
可以通过 $k_1 + k_2 = -1$, 让两个斜率取两组特殊值.

如 $k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{2}$, $k_1 = 0, k_2 = -1$, 求出两条直线交点.

然后再证明一般性. 也就是:

当斜率不存在时, 直线 $x = 2$ 不合题意;

当斜率存在时, 直线 $y = k(x - 2) - 1$ 与椭圆的两交点 A, B , 总满足 $k_1 + k_2 = -1$.



已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A , B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 , 证明: l 过定点.

思考

(1) 条件“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”如何表示? 直线 l 如何表示?

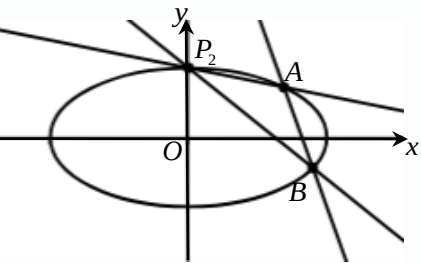
$$k_{P_2A} + k_{P_2B} = -1$$

$$l: y - n = k(x - m) (n - km \neq 1)$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = -1$$

$$l: y = kx + m (m \neq 1)$$

$$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$



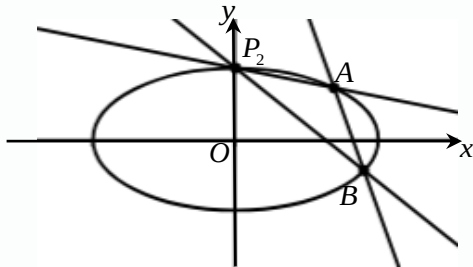
$$k_1 + k_2 = -1 \quad \begin{cases} y = k_1x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$A\left(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}\right)$$

$$B\left(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}\right)$$

$$y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} \left(x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2} \right)$$

总结这类问题的解题策略或注意事项.



思路 1. 设出直线方程, 一般是斜截式, 然后找到两个参数的关系, 整理方程, 得到定点坐标. 注意考虑斜率不存在的情况.

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} \quad l: y = kx + m (m \neq 1) \quad \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

思路 2. 直接求直线方程, 并整理方程, 求出定点.

$$k_1 + k_2 = -1 \quad \begin{cases} y = k_1x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad A\left(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}\right) \quad B\left(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}\right) \quad y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} \left(x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2}\right)$$

思路 3. 设定点坐标, 探究其满足的条件, 根据恒成立的条件得出定点坐标.

思路 4. 由特殊情形或极端位置探索出定点位置, 再证明对一般结论命题也成立.

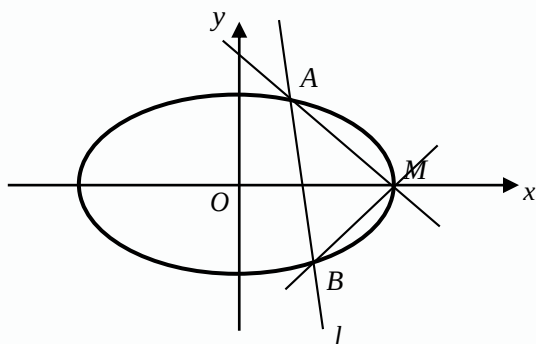
练习

请你完成下面的问题.

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 其左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左, 右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点, 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.



$$\text{由} \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{(-c-2)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \text{所以} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

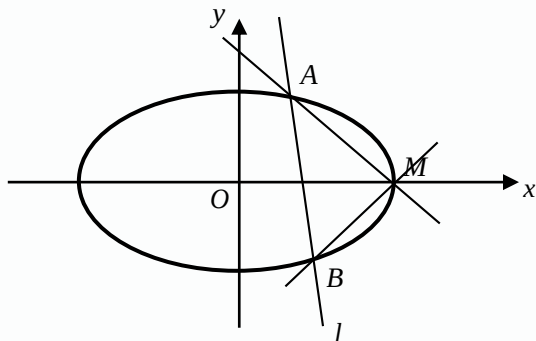
练习

请你完成下面的问题.

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 其左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左, 右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点, 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.



由 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ 可得 $\overrightarrow{MA} = (x_1 - 2, y_1), \overrightarrow{MB} = (x_2 - 2, y_2)$

所以 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$

你算对了吗?

$$\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \quad \Delta > 0$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3}$$

定点为 $(\frac{2}{7}, 0)$

题目1

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，四点 $P_1(1, 1)$ ， $P_2(0, 1)$ ， $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A ， B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ，证明： l 过定点.

题目2

解析几何中的定点问题

已知抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$.

(I) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;

(II) 设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M ， N ，直线 $y = -1$ 分别交直线 OM ， ON 于点 A 和点 B . 求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

总结这类问题的解题策略或注意事项.

思路 1. 设出直线方程, 一般是斜截式, 然后找到两个参数的关系, 整理方程, 得到定点坐标. 注意考虑斜率不存在的情况.

圆的方程

思路 2. 直接求直线方程, 并整理方程, 求出定点.

思路 3. 设定点坐标, 探究其满足的条件, 根据恒成立的条件得出定点坐标.

思路 4. 由特殊情形或极端位置探索出定点位置, 再证明对一般结论命题也成立.

解析几何中的定点问题

你会首选哪个方法来解决呢?



感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作