

解析几何单元测验

1. 对任意的实数 k , 直线 $y = kx - 1$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 2$ 的位置关系为 ()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 以上选项均有可能

【答案】C

【详解】

直线 $y = kx - 1$ 恒过定点 $(0, -1)$,

圆的方程即 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$, 当 $x = 0, y = -1$ 时, $x^2 + y^2 - 2x - 2 < 0$,

则点 $(0, -1)$ 在圆内部, 据此可知: 直线 $y = kx - 1$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x = 2$ 的位置关系为相交.

本题选择 C 选项.

2. 双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的虚轴长为()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】A

【详解】

双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的焦点在 y 轴上,

且 $a = 2, b = 1$,

则虚轴长 $2b = 2$,

故选: A.

3. 若点 P 为抛物线 $C: x^2 = \frac{1}{2}y$ 上的动点, F 为抛物线 C 的焦点, 则 $|PF|$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】D

【解析】由抛物线定义得 $|PF| = y_P + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}$, 所以 $|PF|$ 的最小值为 $\frac{1}{8}$. 选 D.

4. 已知点 F, A 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点、右顶点, 点

$B(0, b)$ 满足 $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【答案】D

【详解】

$$\because \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0,$$

$$\therefore FB \perp AB$$

$$\therefore |FB|^2 + |AB|^2 = |FA|^2,$$

$$\text{即 } c^2 + b^2 + a^2 + b^2 = (a+c)^2, \text{ 整理得 } c^2 - a^2 - ac = 0, \text{ 等式除以 } a^2 \text{ 得 } e^2 - e - 1 = 0$$

$$\text{求得 } e = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (舍负)}$$

$$\therefore e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

故选 D.

5. 已知直线 $2x + y - 4 = 0$ 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点 F_2 , 且与椭圆

在第一象限的交点为 A , 与 y 轴的交点为 B , F_1 是椭圆的左焦点, 且

$|AB| = |AF_1|$, 则椭圆的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$

B. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$

D. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$

【答案】D

【详解】

直线 $2x + y - 4 = 0$ 与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $F_2(2, 0)$, $B(0, 4)$, 所以 $c = 2$,

又 $2a = |AF_1| + |AF_2| = |AB| + |AF_2| = |BF_2| = 2\sqrt{5}$, 所以 $a = \sqrt{5}$, 从而

$$b^2 = 5 - 4 = 1, \text{ 所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{5} + y^2 = 1,$$

故选: D.

6. 集合 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{4 - x^2}\}$, $N = \{(x, y) | x - y + m = 0\}$, 若 $M \cap N$ 的子集恰有 4 个, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
B. $[-2, 2\sqrt{2})$
C. $(-2\sqrt{2}, -2]$
D. $[2, 2\sqrt{2})$

【答案】 D

【解析】

由题意知, 集合 M 中的点在以原点为圆心, 2 为半径的圆的 x 轴上方的半圆上, 集合 N 是与直线 $y = x$ 平行的一组直线,

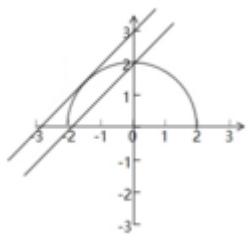
若 $M \cap N$ 有 4 个子集, 则 $M \cap N$ 有两个元素,

所以半圆与直线有两个公共点，由图形知

由 $\frac{|m|}{\sqrt{2}} = 2$ 得 $m = 2\sqrt{2}$,

过 $(-2, 0)$ 点, 则 $-2 - 0 + m = 0$ 得 $m = 2$,

m 的取值范围是 $[2, 2\sqrt{2})$, 故选 D.



7. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 有相同的焦点 F ，点 A 是两曲线的交点，且 $AF \perp x$ 轴，则椭圆的离心率是_____.

【答案】 $\sqrt{2}-1$

【解析】

试题分析：由抛物线的定义和椭圆的定义得

$$|F'F|=|AF|=2C \Rightarrow |AF'|=2a-2c=2\sqrt{2}c \Rightarrow e=\sqrt{2}-1.$$

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 4, $A(2, 3)$ 为 C 上一点, 则 C 的渐近线方程为 _____.

【答案】 $y = \pm\sqrt{3}x$

【详解】

由题意知，双曲线 C 的左焦点为 $F_1(-2,0)$ ，右焦点为 $F_2(2,0)$ ，

$$\because |AF_1| = \sqrt{(2+2)^2 + 3^2} = 5, \quad |AF_2| = \sqrt{(2-2)^2 + 3^2} = 3,$$

由双曲线的定义可得 $2a = ||AF_1| - |AF_2|| = 2$ ， $\therefore a = 1$ ， $b = \sqrt{2^2 - a^2} = \sqrt{3}$ ，

因此，双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ 。

故答案为： $y = \pm\sqrt{3}x$ 。

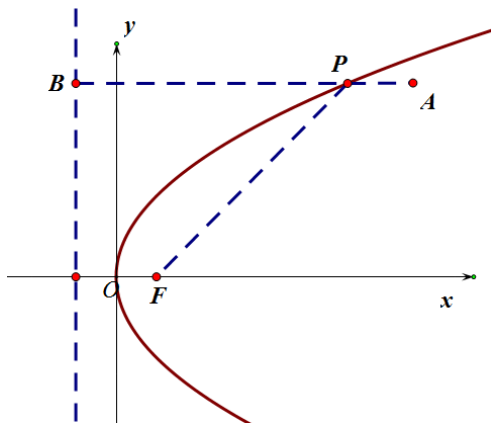
9. 若 P 是抛物线 $C: y^2 = 2x$ 上一点， F 为抛物线 C 的焦点，点 $A(\frac{7}{2}, 2)$ ，则

$|PA| + |PF|$ 取最小值时点 P 的坐标为_____。

【答案】 $(2, 2)$

【详解】

解：作出示意图，过点 P 作抛物线准线的垂线 PB ，垂足为 B ，



由抛物线的定义可知， $|PB| = |PF|$ ，

由图可知，当点 P 满足 PA 与抛物线准线垂直时 $|PA| + |PF|$ 取最小值，

将 $y = 2$ 代入到 $y^2 = 2x$ 得 $x = 2$ ，此时点 P 的坐标为 $(2, 2)$ ，

故答案为： $(2, 2)$ 。

10. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x = -1$ ，焦点为 F ， A, B, C 为抛物线上不同的三点， $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FB}|, |\overrightarrow{FC}|$ 成等差数列，且点 B 在 x 轴下方，若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$ ，则直线 AC 的方程为_____。

【答案】 $2x - y - 1 = 0$

【解析】 试题分析:由题设可得 $p = 2, F(1, 0)$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则

$\overrightarrow{FA} = (x_1 - 1, y_1), \overrightarrow{FB} = (x_2 - 1, y_2), \overrightarrow{FC} = (x_3 - 1, y_3)$, 由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$ 可得

$$\begin{cases} x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases},$$

又 $|\overrightarrow{FA}| = x_1 + 1, |\overrightarrow{FB}| = x_2 + 1, |\overrightarrow{FC}| = x_3 + 1$, 故由 $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FB}|, |\overrightarrow{FC}|$ 成等差数列可得

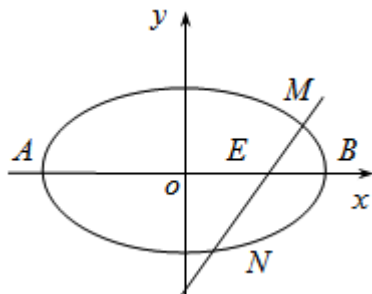
$$2x_2 = x_1 + x_3, \text{ 由此可得 } x_2 = 1, y_2 = -2 \Rightarrow y_1 + y_3 = -y_2 = 2.$$

而 $k_{AC} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{4}{y_1 + y_2} = 2$, 且 $\frac{x_1 + x_3}{2} = 1, \frac{y_1 + y_3}{2} = 1$, 即 AC 的中点坐标为由此可

得 $M(1, 1)$. 故由点斜式方程可得 $y - 1 = 2(x - 1)$, 应填答案 $2x - y - 1 = 0$.

11. 已知点 $M(2, 1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, A, B 是长轴的两个端

点, 且 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -3$.



(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 已知点 $E(1, 0)$, 过点 $M(2, 1)$ 的直线 l 与椭圆的另一个交点为 N , 若点 E 总在以 MN 为直径的圆内, 求直线 l 的斜率的取值范围.

【答案】 (I) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$; (II) $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$.

【详解】

(I) 由已知可得 $(-a - 2, -1) \cdot (a - 2, -1) = -3$, 解得 $a^2 = 8$,

又点 $M(2, 1)$ 在椭圆 C 上, 即 $\frac{2^2}{8} + \frac{1^2}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 2$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(II) 设 $N(x_1, y_1)$, 当直线 l 垂直于 x 轴时, 点 E 在以 MN 为直径的圆上, 不合题意,

因此设直线 l 的方程为 $y = kx - 2 + 1$,

代入椭圆方程消去 y 得 $(4k^2 + 1)x^2 + 8(k - 2k^2)x + 4(4k^2 - 4k - 1) = 0$,

则有 $2x_1 = \frac{4(4k^2 - 4k - 1)}{4k^2 + 1}$, 即 $x_1 = \frac{2(4k^2 - 4k - 1)}{4k^2 + 1}$, $y_1 = \frac{-4k^2 - 4k + 1}{4k^2 + 1}$,

且判别式 $\Delta = 16(2k + 1)^2 > 0$, 即 $k \neq -\frac{1}{2}$, 又点 E 总在以 MN 为直径的圆内,

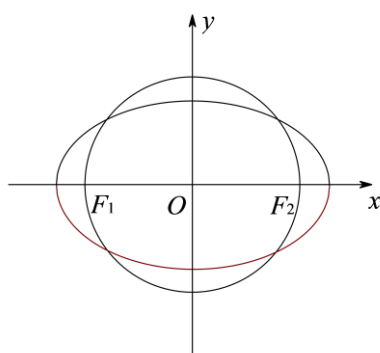
所以必有 $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} < 0$, 即有 $(x_1 - 1, y_1) \cdot (1, 1) = x_1 + y_1 - 1 < 0$,

将 x_1, y_1 代入得 $\frac{4k^2 - 8k - 3}{4k^2 + 1} + \frac{-4k^2 - 4k + 1}{4k^2 + 1} < 0$, 解得 $k > -\frac{1}{6}$,

所以满足条件的直线 l 的斜率的取值范围是 $\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$.

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $M(0, \sqrt{2})$ 在椭圆 C

上, 焦点为 F_1, F_2 , 圆 O 的直径为 F_1F_2 .



(1) 求椭圆 C 及圆 O 的标准方程;

(2) 设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P , 且直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点. 记

$\triangle OAB$ 的面积为 S , 证明: $S < \sqrt{3}$.

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, $x^2 + y^2 = 6$; (2) 见解析

【详解】

(1) 由题意, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b = \sqrt{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 2, \\ c^2 = 6. \end{cases}$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

因为焦点在 x 轴上,

所以椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{6}, 0), F_2(\sqrt{6}, 0)$.

所以直径为 F_1F_2 的圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 6$.

(2) 由题意知, 直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P ,

设直线 l 的斜截式方程为 $y = kx + m (k < 0, m > 0)$.

因为直线 l 与圆 O 相切,

所以点 O 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{6}$.

即 $m^2 = 6k^2 + 6$.

因为直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点,

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$, 整理得 $(1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 8 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{4m^2-8}{1+4k^2}, \\ \Delta > 0 \end{cases}.$$

因为 $\Delta = (8km)^2 - 4 \times (1+4k^2)(4m^2-8) = 16 \times (8k^2 - m^2 + 2)$.

又 $m^2 = 6k^2 + 6$,

所以 $\Delta = 32(k^2 - 2) > 0$.

所以 $k^2 > 2$.

又因为 $k < 0$,

所以 $k < -\sqrt{2}$.

$$\text{因为 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}\sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{k^2-2}}{1+4k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{k^2-2}}{1+4k^2} \times \sqrt{6} \\ &= 4\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{(1+k^2)(k^2-2)}{(1+4k^2)^2}}. \end{aligned}$$

设 $1+4k^2 = t$, 则 $t > 9$, 则

$$S_{\triangle OAB} = 4\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{(t-9)(t+3)}{16t^2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{-\frac{27}{t^2} - \frac{6}{t} + 1}.$$

$$\text{令 } u = \frac{1}{t}, 0 < u < \frac{1}{9}.$$

$$\text{则 } S_{\triangle OAB} = \sqrt{3} \times \sqrt{-27u^2 - 6u + 1}.$$

$$\text{设 } h(u) = -27u^2 - 6u + 1 = -27\left(u + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{4}{3}.$$

因为 $h(u)$ 在 $(0, \frac{1}{9})$ 上单调递减,

所以 $h(u) < 1$.

所以 $S_{\triangle OAB} < \sqrt{3}$.