

课题：解析几何中的定点问题

学习目标：

以解析几何中直线过定点问题为载体，借助图形，明确运算对象、探索运算思路、设计运算程序、实施运算，提升借助代数运算解决几何问题的能力.

学法指导：

本节课需要先回顾以下基础知识：

1. 确定含参直线过定点的方法；
2. 过两点的直线的斜率公式；
3. 直线与椭圆相交这种位置关系的代数表示.

然后完成下面的任务.

【任务一】

1. 请你结合下面的问题，想一想，如何说明一条直线过定点？

直线 $y = kx + k + 3$ 过定点_____.

2. 直线 $l: y = kx + b (b \neq 1)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交，直线方程中两参数需满足什么条件？

【任务二】

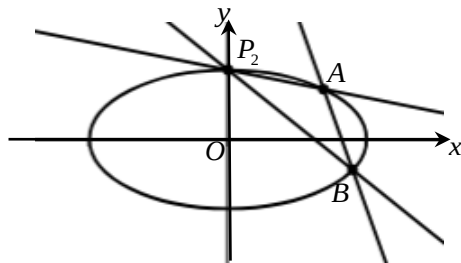
1. 请你尝试完成下面的问题：

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，四点 $P_1(1, 1)$ ， $P_2(0, 1)$ ， $P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $P_4\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

中恰有三点在椭圆 C 上.

(I) 求 C 的方程；

(II) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A ， B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ，证明： l 过定点.



2. 结合你的解决思路，进一步思考下面的问题：

(1) 条件“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”如何表示？直线 l 如何表示？

(2) 结合上面的表示，你打算设“谁”？

(3) 每种方法的运算难点在哪？如何突破？

3. 思考，在这样的问题中如果结论成立，也就是直线过定点，那么我们能不能猜出这个定点？

【任务三】

请你结合上面问题的解决过程，画出问题解决的思维导图.

【任务四】

请你完成下面的问题.

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 其左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左, 右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点, 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

【任务五】

总结这类问题的解题策略或注意事项.

参考答案

【任务一】

1. $(-1, 3)$.

2. 联立 $\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$, 整理得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kbx + 4b^2 - 4 = 0$

由 $\Delta > 0$ 可知 $4k^2 - m^2 + 1 > 0$.

【任务二】

1. 第一问较容易, 不在赘述.

根据椭圆对称性, 必过 P_3, P_4

又 P_4 横坐标为 1, 椭圆必不过 P_1 , 所以过 P_2, P_3, P_4 三点

将 $P_2(0, 1), P_3\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入椭圆方程得

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a^2 = 4, b^2 = 1$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

2 下面主要分析第二问.

(1) 条件“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”如何表示? 直线 l 如何表示?

首先, 根据“直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ”, 可以表示 $k_{P_2A} + k_{P_2B} = -1$

根据斜率公式, 可以设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{那么 } k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2}.$$

其次, 直线 l 的表示方式:

直线 l 可以通过斜截式来表示;

直线 l 可以通过表示 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两个点来表示;

直线 l 可以通过一个定点和斜率来表示.

(2) 结合上面的表示, 你打算设“谁”?

思路 1——直线 l 可以通过斜截式来表示

① 当斜率存在时, 设 $l: y = kx + m (m \neq 1)$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{ 整理得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1 + 4k^2}$$

$$\text{则 } k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_1 - 1}{x_1} + \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{x_2(kx_1 + m) - x_2 + x_1(kx_2 + m) - x_1}{x_1x_2} = -1,$$

$$\text{所以 } x_2(kx_1 + m) - x_2 + x_1(kx_2 + m) - x_1 = -x_1x_2$$

$$2kx_1x_2 - (x_1 + x_2) + m(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0$$

将 $x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2}$ 代入上式, 可得

$$2k \frac{4m^2-4}{1+4k^2} - \frac{-8km}{1+4k^2} + m \frac{-8km}{1+4k^2} + \frac{4m^2-4}{1+4k^2} = 0$$

$$8km^2 - 8k + 8km - 8km^2 + 4m^2 - 4 = 0$$

$$2k - 2km - m^2 + 1 = 0$$

$$2k(1-m) + m^2 - 1 = 0$$

$$(2k+m+1)(1-m) = 0$$

又 $m \neq 1$

$m = -2k - 1$, 此时 $\Delta = -4k$, 存在 $k < 0$ 使得 $\Delta > 0$ 成立.

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = kx - 2k - 1$

当 $x = 2$ 时, $y = -1$

所以 l 过点 $(2, -1)$.

② 当斜率不存在时, 设 $l: x = t$, $A(t, y_A), B(t, -y_A)$

$$k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_A - 1}{t} + \frac{-y_A - 1}{t} = \frac{-2}{t} = -1$$

得 $t = 2$, 此时 l 过椭圆右顶点, 不存在两个交点, 故不满足.

综上, 直线 l 过定点 $(2, -1)$.

思路 2——直线 l 可以通过表示 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两个点来表示;

如何能将两个点的坐标表示呢? 可以借助直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率,

设直线 P_2A 的斜率为 k_1 , 直线 P_2B 的斜率为 k_2 ,

直线 P_2A 方程为 $y = k_1x + 1$

$$\text{联立} \begin{cases} y = k_1x + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \text{整理得 } (1 + 4k_1^2)x^2 + 8k_1x = 0$$

$$\text{可得 } A\left(\frac{-8k_1}{1+4k_1^2}, \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2}\right)$$

$$\text{同理可得 } B\left(\frac{-8k_2}{1+4k_2^2}, \frac{1-4k_2^2}{1+4k_2^2}\right)$$

根据两点所在直线的斜率公式可得直线 l 的斜率为 $k = \frac{1}{4k_1k_2 - 1}$.

接下来, 便可以得到直线 l 的方程:

$$y - \frac{1-4k_1^2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} \left(x - \frac{-8k_1}{1+4k_1^2} \right)$$

$$y + 1 - \frac{2}{1+4k_1^2} = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} x - \frac{1}{4k_1k_2 - 1} \cdot \frac{-8k_1}{1+4k_1^2}$$

$$y + 1 = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} x + \frac{8k_1(1+k_2) - 2}{(4k_1k_2 - 1)(1+4k_1^2)} \text{ 又 } k_1 + k_2 = -1$$

$$\text{所以 } y + 1 = \frac{1}{4k_1k_2 - 1} x + \frac{-2}{(4k_1k_2 - 1)}$$

$$y+1=\frac{1}{4k_1k_2-1}(x-2)$$

故直线 l 过定点 $(2, -1)$.

思路 3——直线 l 可以通过一个定点和斜率来表示

思路 3 类似思路 1, 只是当斜率存在时, 将直线方程设为 $l: y-n=k(x-m)(n-km \neq 1)$. 详细计算过程略.

(3) 每种方法的运算难点在哪? 如何突破?

详见 PPT 视频解说.

3. 思考, 在这样的问题中如果结论成立, 也就是直线过定点, 那么我们能不能猜出这个定点?

可以通过 $k_1+k_2=-1$, 让两个斜率取两组特殊值.

如 $k_1=-\frac{1}{2}, k_2=-\frac{1}{2}, k_1=0, k_2=-1$, 求出两条直线交点.

然后再证明一般性. 也就是:

当斜率不存在时, 直线 $x=2$ 不合题意;

当斜率存在时, 直线 $y=k(x-2)-1$ 与椭圆的两交点 A, B , 总满足 $k_1+k_2=-1$.

【任务三】

$$(I) \text{ 由 } \begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{(-c-2)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(II) (\frac{2}{7}, 0).$$

【任务四】

请你结合上面问题的解决过程, 画出问题解决的思维导图.

略.

【任务五】

总结这类问题的解题策略或注意事项.

思路 1. 设出直线方程, 一般是斜截式, 然后找到两个参数的关系, 整理方程, 得到定点坐标.

注意考虑斜率不存在的情况.

思路 2. 直接求直线方程, 并整理方程, 求出定点.

思路 3. 设定点坐标, 探究其满足的条件, 根据恒成立的条件得出定点坐标.

思路 4. 由特殊情形或极端位置探索出定点位置, 再证明对一般结论命题也成立.